Vettori, derivate di vettori, campi vettoriali, cinematica, coordinate curvilinee ortogonali

Vettore in un s.r. cartesiano	$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$
Vettore come modulo e versore	$\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\,\hat{a} = a\hat{a} \quad (\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}, \quad \lvert\hat{a}\rvert = 1)$
Prodotto scalare	$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$
Prodotto vettoriale	$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ (ortogonale al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$; $c = ab\sin\theta$) $c_x = a_yb_z - a_zb_y$ (e permutazione ciclica di x, y, z)
Ortonormalita\` dei versori cartesiani	$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$
Sistema destrorso	$\vec{e}_i\times\vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$ (somma sull'indice k)
Derivata di un vettore espresso in componenti cartesiane	$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{da_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{da_z}{dt}\vec{e}_z = \frac{da_k}{dt}\vec{e}_k$
Derivata di un versore (puo\` solo ruotare, il modulo e\` fisso)	$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}$
Derivata di un vettore (in termini di modulo e versore)	$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\hat{a} + \vec{\omega}\times\hat{a}$
Momento di un vettore $\vec{a}$ applicato ad un punto P rispetto un polo O	$\vec{m}_O \equiv \vec{r}_{OP}\times\vec{a}$
Traiettoria di un punto materiale, parametrizzata dal tempo	$\vec{r} = \vec{r}(t)$
Ascissa curvilinea in funzione del tempo (legge oraria)	$s = s(t) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2dt^2$ (v=velocita\`)
Versore tangente	$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = K\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \frac{1}{K} = \left\lvert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rvert$
Versore normale	$\vec{N} = R\frac{d\vec{T}}{ds}$ (R = raggio di curvatura)
Velocita\`	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \dot{s}\vec{T} \\ \dot{r}\vec{N} + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{cases}$

Accelerazione	$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \\ \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{N} \\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi \end{cases}$
Moto circolare	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Moto circolare	$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ($\vec{\alpha}$ = accelerazione angolare)
Gradiente di un campo scalare in coordinate cartesiane	$\vec{\nabla}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}$
Gradienti particolari **(importantissimi)**	$\vec{\nabla} r = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$
Derivata lungo la direzione $\vec{n}$ (rappresenta un versore)	$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi$
Divergenza di un campo vettoriale $\vec{E}$ in coordinate cartesiane	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$
Laplaciano di Φ (in coord. Cartesiane)	$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$
Rotore di un campo vettoriale $\vec{E}$ in coordinate cartesiane	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$
Studiare coordinate polari e cilindriche. Elementi di area e volume. Sapere che gradiente, rotore, divergenza e laplaciano hanno una forma diversa da quella in coordinate cartesiane.	
Elemento di linea (coord. cartesiane)	$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
Elemento di linea (coord. sferiche)	$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi$
Elemento di linea (coord. cilindriche)	$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi + \vec{e}_z dz$
Elemento di volume (c. cartesiane)	$dV = dxdydz$
Elemento di volume (c. sferiche)	$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$
Elemento di volume (c. cilindriche)	$dV = r dr d\varphi dz$
Integrale di linea di un campo vettoriale $\vec{E}$	$\int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} E_x dx + E_y dy + E_z dz = \int_{t_A}^{t_B} \vec{E}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$
Flusso del campo attraverso una superficie Σ	$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA$ (se e\` chiusa: $\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA$)
Integrale di superficie parametrizzando la superficie con 2 parametri u,v	$\int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \int_U \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\lvert \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \rvert} dudv$

Teorema della divergenza	$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{V_{\Sigma}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$
Teorema di Stokes	$\oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma_C} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \Phi_{\Sigma_C}(\vec{\nabla} \times \vec{E})$
Campo conservativo	$\oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\vec{\nabla} V$
Campo solenoidale $\vec{B}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
Campo $\vec{F}$ sempre esprimibile come	$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$