Le condizioni di validita` del teorema di Green e Stokes (o del rotore), che non abbiamo discusso a lezione, sono:

- le derivate parziali del campo esistono e sono continue
- il campo sia definito su un dominio a connessione lineare semplice, vale a dire che ogni curva contenuta nel dominio e` contraibile in un punto ancora appartenente al dominio

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma(C)} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dA$$

vale a dire che la circuitazione del campo e` uguale al flusso del rotore del campo su una qualsiasi superficie che abbia C come contorno.
Importante: il verso della circuitazione e il versore normale devono essere scelti in modo consistente. Ad esempio, se la curva giace nel piano xy, percorrendola in senso antiorario (= verso positivo) la normale alla superficie punta verso l'asse z positivo.
[Verso positivo: camminando lungo la curva in senso antiorario la superficie che sta "dentro" alla curva e` sulla mia sinistra. La testa punta verso la direzione "uscente" dalla superficie].

1)
Usando il teorema di Stokes nel piano xy (alias teorema di Green),dimostrare che la circuitazione del campo:

$$F(\vec{r}) = (xz^2 + zy)\vec{e}_x + (2yz + 3x)\vec{e}_y + (x^3 z + y^2)\vec{e}_z$$

lungo una circonferenza di raggio R e centro nell'origine e` uguale all'area del cerchio di raggio R delimitato dalla circonferenza.

2)
Dato il campo di Biot-Savart:

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{e}_y$$

calcolare la sua circuitazione lungo una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine.

Osserviamo che in questo caso il teorema di Green non e` applicabile. Se contraiamo la circonferenza essa si riduce all'origine. Ma l'origine non puo` appartenere al dominio di definizione del campo, perche` ne e` un punto singolare. Calcolare la componente z del rotore del campo per convincersene.

Guida alla soluzione

Parametrizziamo la circonferenza con: $\vec{r}(t) = \cos t\vec{e}_x + \sin t\vec{e}_y$ con $0 \le t < 2\pi$.

L'integrale di linea e`:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Sostituire a x e y le espressioni parametriche cos t e sin t, svolgere il prodotto scalare e calcolare l'intergrale.

Calcolare $\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)_z$.

3)

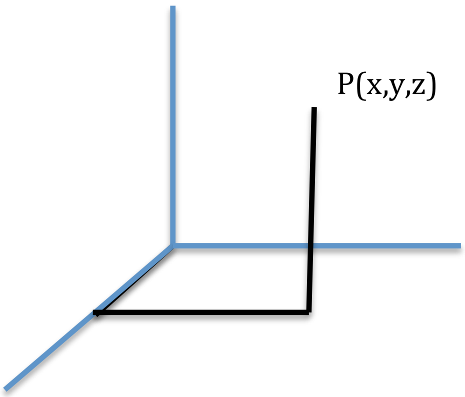
Dimostrare che il campo $F(\vec{r}) = (4xy - 3x^2z^2)\vec{e}_x + 2x^2\vec{e}_y - 2x^3z\vec{e}_z$ e` conservativo.

Calcolare la funzione potenziale, assumendo l'origine come riferimento.

Guida alla soluzione

- verificare che $\vec{\nabla} \times F(\vec{r}) = \vec{0}$.

- allora: $F(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$, e $U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$



Conviene calcolare l'integrale di linea tra (0,0,0) e il generico punto (x,y,z) lungo la spezzata definita dai 3 segmenti (0,0,0) -> (x,0,0) -> (x,y,0) ->(x,y,z). La funzione U(x,y,z) cercata e` meno la somma dei tre contributi (a meno della costante U(0,0,0)). L'integrale di linea tra (0,0,0) e (x,y,z) non dipende dal circuito utilizzato per il calcolo.