Esercizio sul calcolo del flusso di un campo attraverso una superficie

Sia dato il campo $\vec{F}(\vec{r}) = z\vec{e}_x - \vec{e}_y + x\vec{e}_z$. Calcolare il flusso attraverso la superficie Σ definita dalla porzione nel primo ottante (x>0,y>0,z>0) del piano x+y+z=1.

Calcolare inoltre il flusso del campo attraverso la superficie del solido delimitato dai piani xy, xz, yz e dal piano x+y+z=1.

Soluzione

Il flusso e` definite da: $\Phi = \int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, dove $\vec{n}$ indica la normale al piano x+y+z=1, uscente (penetra nel primo ottante).

Possiamo parametrizzare il piano usando come parametri le coordinate x e y, ossia attraverso la sua proiezione nel piano xy. Usando le notazioni che abbiamo impiegato a lezione, poniamo:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} \qquad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 - u.$$

I parametric u e v (che poi sono x e y) si muovono nel triangolo dato da z=0, ossia il dominio e` delimitato dall'asse x, dall'asse y e dalla retta 1-u-v=0, ovvero v=1-u.

Ricordiamo che: $\vec{n}dA = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) du dv$. Nel nostro caso: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{e}_x - \vec{e}_z$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{e}_y - \vec{e}_z$, per cui $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$. Potevamo piu` rapidamente considerare che la normale al piano x+y+z=1, che rappresenta una *superficie di livello* della funzione f(x,y,z)=x+y+z e` data dal gradiente della funzione f: $\vec{\nabla} f = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$.

Il nostro integrale di superficie diventa dunque:

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\text{Triangolo}} du\, dv \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) = \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv (1 - u - v - 1 + u) = \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv(-v) = -\frac{1}{6}$$

Il flusso attraverso la superficie *chiusa* indicata nel secondo punto, per il teorema della divergenza e` dato da: $\Phi = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$ =0, poiche` la divergenza del campo e` nulla.