1. Dimostrare che $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, vale a dire che il prodotto scalare su un prodotto vettoriale e` invariante per scambio ciclico dei vettori coinvolti.

   E` abbastanza immediato se si usa la notazione "tensoriale": $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$ e $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

2. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono due vettori dipendenti da un parametro *t*, dimostrare che $\frac{d(\vec{a}\times\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$ (l'ordine e` importante!).

3. Calcolare la lunghezza dell'arco della curva $y = x^{3/2}$ tra i due punti definiti da $x = a$ e $x = b$.

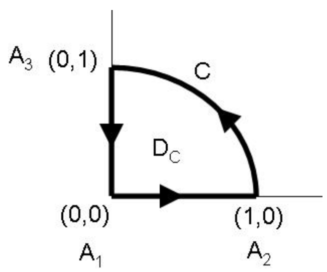
   Detto dl l'elemento d'arco lungo la curva, si deve calcolare l'integrale $\int_{P_a}^{P_b} dl$.

   Parametrizziamo la curva ponendo $x = t$ $(a \le t \le b)$ *e* $y = t^{3/2}$ *(naturalmente non e` necessario, possiamo lavorare direttamente con x, "come se fosse t"). L'elemento d'arco e` dato da:* $dl = |d\vec{r}| = |\frac{d\vec{r}}{dt}| dt$. *Nel nostro caso abbiamo* $\vec{r} = t\vec{e}_x + t^{3/2}\vec{e}_y$, *quindi*

   $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x + \frac{3}{2}t^{1/2}\vec{e}_y$ ...

4. Calcolare l'integrale di linea $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ della funzione vettoriale $\vec{F} = x\vec{e}_x + 2xy\vec{e}_y$ lungo la curva *C* definita come l'arco della parabola $y = 2x^2$ che connette i punti A(0,0) e B(1,2).

5. Dato $\vec{F} = \frac{1}{3}(x^3 - y^3)\vec{e}_x + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)\vec{e}_y$ e la curva C rappresentata nella figura (2 segmenti e un arco di circonferenza), calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ definita da $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$. *Parametrizzare il tratto circolare della curva in funzione dell'angolo polare t (x=cos t, y=sin t). Sfruttare il fatto che y=0 , dy=0 sul segmento orrizzontale e x=0,dx=0 su quello verticale. Sommare i 3 contributi. Attenzione al fatto che lungo il segmento orrizzontale l'integrale va da 0 a 1 mentre lungo quello verticale da 1 a 0.*



6. Calcolare l'area di una sfera di raggio R.

Usando gli angoli polare $\vartheta\ (0 \le \vartheta \le \pi)$ *e* $\varphi\ (0 \le \varphi \le 2\pi)$ *per parametrizzare la superficie della sfera troviamo l'elemento di area* $dA = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| d\vartheta d\varphi = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ *(si ricava anche da piu` semplici considerazioni geometriche). L'area della sfera e` quindi:* $A = \int dA = \cdots$