Cose da sapere - elettromagnetismo

In queste pagine c'e` un riassunto di relazioni e risultati che abbiamo discusso e che devono essere conosciuti.

Forza di Lorentz agente su una carica q in moto con velocita` v in presenza di un campo magnetico B e di un campo elettrico E	$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$
Contributo infinitesimo al campo magnetico prodotto da un elemento di circuito lineare dl percorso da una corrente i in un punto che si trova nella posizione $\vec{r}$ visto da dl (prima legge elementare di Laplace)	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$
Elemento di forza che agisce su un elemento di corrente idl immerso in un campo magnetico B (seconda legge elementare di Laplace)	$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$
Intensita` del campo magnetico a distanza r da un filo rettiline infinito (praticamente molto lungo) percorso da una corrente i (la direzione del campo e` tangenziale alla circonferenza con centro sul filo, perpendicolare al filo, e di raggio r; il verso del campo e la direzione della corrente sono legati dalla regola della mano destra).	$B = B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$
Intensita` del campo magnetico nel centro di una spira di raggio r percorsa da una corrente i.	$B = \frac{\mu_0 i}{2r}$
Intensita` del campo magnetico nel vuoto all'interno di un solenoide percorso dalla corrente i con n spire per unita` di	$B = \mu_0 ni$

lunghezza	
Legge di Gauss per il magnetismo (Σ rappresenta una superficie chiusa)	$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \oint_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{n}\,dA = 0$ (forma integrale) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (forma locale o differenziale)
Legge di Ampere	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_{\text{k - concatenata}} i_k$ (forma integrale) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ (forma differenziale)
Momento magnetico di una spira piana di area S e versore normale n percorsa da una corrente i	$\vec{m} = iS\vec{n}$
Momento della forza (momento meccanico) che agisce su un dipolo magnetico di momento m immerso in un campo magnetico esterno B	$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$
Energia di un dipolo magnetico di momento m in un campo esterno B	$U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$
Campo magnetico statico espresso in termini di un potenziale vettore A	$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ (invarianza di gauge: lo stesso $\vec{B}$ deriva da $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$)
Equazione per il potenziale vettore (nel gauge in cui $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$)	$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$
Soluzione per $\vec{A}$	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}dV'$
Induzione elettromagnetica: legge di Faraday-Lenz (in un circuito la fem indotta e\` data dalla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico *concatenato* con il circuito – il concetto di circuito concatenato e\` possibile grazie al fatto che il campo magnetico e\` a divergenza nulla)	$\varepsilon_{indotta} \equiv \varepsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$
Legge di induzione elettromagnetica in forma locale e integrale	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\varepsilon = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\Sigma(C)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dA$
Dati 2 circuiti 1 e 2 accoppiati, il **coefficiente di mutua induzione** $M_{12}=M_{21}$ fornisce il flusso del	$\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{12}i_1$

campo magnetico concatenato a un circuito dovuto a una corrente che circola nell’altro circuito	
f.e.m. indotta tra due circuiti accoppiati	$\varepsilon = -M\dfrac{di}{dt}$
Coefficiente di autoinduzione (induttanza)	$\Phi(\vec{B}) = Li$
f.e.m. di autoinduzione	$\varepsilon = -L\dfrac{di}{dt}$
Induttanza di un solenoide lungo l, con N spire (n spire per unita` di lunghezza), ciascuna di area A (V=volume del solenoide)	$L = \mu_0\dfrac{AN^2}{l} = \mu_0 Al\cdot n^2 = \mu_0 Vn^2$
Serie di n induttanze disaccoppiate (coefficienti di mutua induzione trascurabili rispetto alle induttanze)	$L_{\text{serie}} = \sum_{k=1}^{n} L_k$
Parallelo di n induttanze disaccoppiate (coefficienti di mutua induzione trascurabili rispetto alle induttanze)	$L^{-1}_{\text{parallelo}} = \sum_{k=1}^{n} L^{-1}_k$
Energia magnetica di una induttanza	$U = \dfrac{1}{2}Li^2$
Densita` di energia magnetica nel vuoto (energia magnetica per unita` di volume)	$u_B(\vec{r}) = \dfrac{1}{2\mu_0}\left\|\vec{B}(\vec{r})\right\|^2$
Corrente di spostamento (aggiunta alla corrente di conduzione impone la validita` dell’equazione di continuita` della carica elettrica)	$\vec{J}_S = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
Equazioni di Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$
Campi elettrico e magnetico in termini dei potenziali scalare e vettore	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$
Invarianza di gauge (i campi elettrico e magnetico non cambiano se si trasformano i potenziali scalare e vettore	$\vec{A}\rightarrow\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$ $\Phi\rightarrow\Phi' = \Phi - \dfrac{\partial f}{\partial t}$

secondo questa regola: f e` una funzione arbitraria – purche` derivabile – del tempo e del punto nello spazio)	
Equazioni dei potenziali (derivate dalle equazioni di Maxwell)	$\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$ (corrente di conduzione) $\Delta\Phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Soluzione (potenziali ritardati)	$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t - \frac{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}{c})}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$ $\Phi(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\Phi(\vec{r}\,',t - \frac{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}{c})}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$
Equazione delle onde per i potenziali (nel vuoto, in regioni in cui densita` di carica e correnti di conduzione sono nulle) – valida nel **gauge di Lorentz,** nel quale i potenziali soddisfano la relazione: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$=0	$\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ $\Delta\Phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$
Equazione delle onde per i campi nel vuoto, in assenza di cariche e correnti	$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ $\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$ $c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ $c \approx 3\times 10^8$ m/s
Onda piana	$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$
Frequenza, Periodo	$\nu = \frac{\omega}{2\pi},\ T = \frac{1}{\nu}$
Numero d'onda, lunghezza d'onda	$k = \lvert\vec{k}\rvert,\ \lambda = \frac{2\pi}{k}$
Velocita` di fase	$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Le onde sono trasversali (rispetto alla direzione di propagazione) e i campi e la direzione di propagazione formano una terna destrorsa	$\vec{k}\cdot\vec{E}=0\ \ (\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0)$ $\vec{k}\cdot\vec{B}=0\ \ (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0)$ $\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}\ \ (\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$
Vettore di Poynting	$\vec{S}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$
Conservazione dell'energia: il campo elettromagnetico trasporta energia. La *densita`* di energia e` data da $u(\vec{r},t)=\frac{\varepsilon_0}{2}\lvert\vec{E}\rvert^2+\frac{1}{2\mu_0}\lvert\vec{B}\rvert^2.$	$\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}\left[+\vec{J}\cdot\vec{E}\right]=0$ Dimensione fisica di S: [S]/L = E/L^3T ==> [S]=Energia/(Superficie x Tempo) J/m^2s
Intensita` dell'onda	$I\equiv\left\langle\lvert\vec{S}\rvert\right\rangle$