Energia del campo elettrostatico

- Carica di un condensatore
  - stato iniziale: carica=(0,0), V=0
  - stato finale: carica=(Q,-Q), V=Q/C
- La separazione di cariche richiede un lavoro

$$\boxed{dW = dq V(q) = dq \frac{q}{C}}$$

Lavoro per spostare la carica dq da una armatura all'altra quando sulle armature e` presente la carica q e –q.

Energia del campo elettrostatico

$$W = \int_0^Q dW(q) = \int_0^Q dq \frac{q}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

= **energia potenziale** elettrostatica immagazzinata nel sistema attraverso l'operazione di carica.

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

Densita` di energia nel campo elettrostatico

- Condensatore piano a facce parallele (ideale: no effetti ai bordi)
- Area armature: A, distanza: h, volume: Ah

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{h}(Eh)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ah)$$

- Dividendo per il volume:

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Densita` di energia elettrostatica.

Valida in generale.

Densita` di energia nel campo elettrostatico

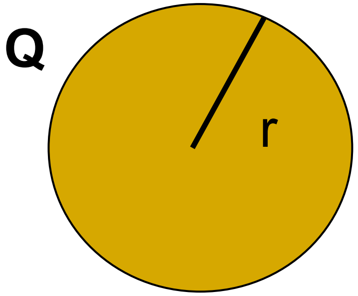
- Se in un volume V dello spazio e` presente un campo elettrostatico **E**, l'energia elettrostatica contenuta nel volume e`:

$$\boxed{U_E = \int_V u_E(\vec{r})\, dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 \,|\vec{E}(\vec{r})|^2\, dV}$$

Lavoro per costruire la distribuzione di cariche che origina il campo

Risultato molto importante nei fenomeni dinamici

Esempio



Sfera di raggio r

Carica Q sulla superficie

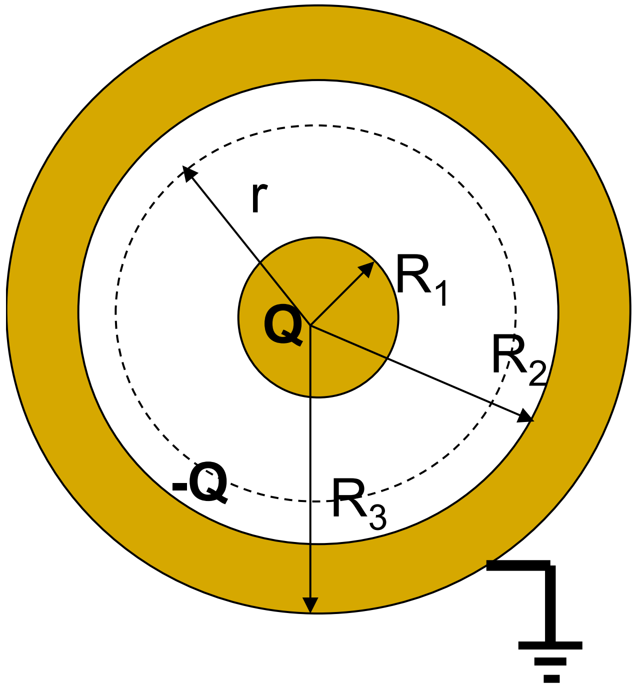
Energia elettrostatica nel campo ??

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

$$U_E = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{r^4}(4\pi r^2)dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

Osservazione: coincide con $U_E = \dfrac{Q^2}{2C}$ (lavoro per caricare)

Esempio



Carica +Q e -Q sulle superficie di un condensatore sferico ai raggi R_1 e R_2

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\vec{e}_r & R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$U_E = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Esercizio: verificare che $U_E = \dfrac{Q^2}{2C}$

Esempio

Condensatore cilindrico di raggi R_1e R_2 e altezza h

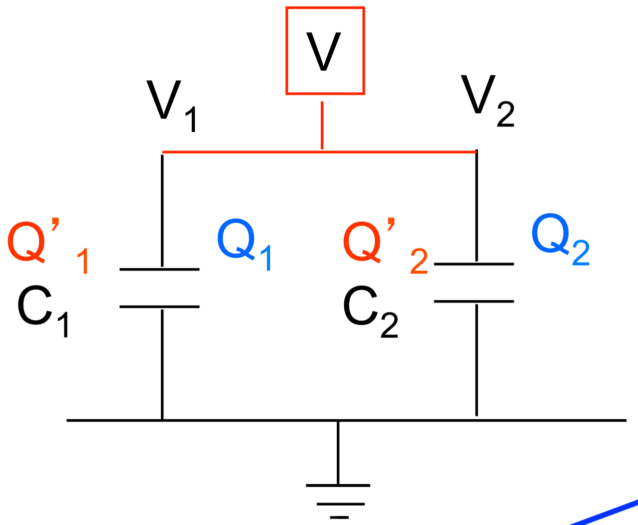
$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{h}\dfrac{1}{r}\vec{e}_r & R_1<r<R_2\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

$$dV=2\pi rhdr$$

$$U_E=\int\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{hr}dr=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}\log\frac{R_2}{R_1}$$

Esercizio: verificare che $U_E=\dfrac{Q^2}{2C}$

Esempio



$$U_E^{in} = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

$$Q = CV = C_1V_1 + C_2V_2$$

$$(C_1 + C_2)V = C_1V_1 + C_2V_2$$

$$\boxed{V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}}$$

$$U_E^{fin} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$$

$$\boxed{\Delta U_E = U_E^{fin} - U_E^{in} = -\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_2)^2 < 0}$$

Lo spostamento delle cariche ha richiesto un lavoro

Energia di sistemi di cariche

- **Sistema di cariche puntiformi**

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} q_i V_{ij}$$

- **Distribuzioni continue**

$$U_E = \frac{1}{2}\int V(\vec{x})\rho(\vec{x})d^3x + \frac{1}{2}\int V(\vec{x})\sigma(\vec{x})dA + \frac{1}{2}\int V(\vec{x})\lambda(\vec{x})dl$$

Sempre vero: $U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\vec{E}(\vec{x})|^2\, d^3x$

Energia di sistemi di cariche
(distribuzione continua)

$$U_E = \frac{1}{2}\int \rho V d^3x \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$U_E = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} V d^3x$$

Integriamo su una sfera S_R e mandiamo il suo raggio all'infinito

$$V\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(V\vec{E}) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V = \vec{\nabla}\cdot(V\vec{E}) + E^2$$

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{S_R} d^3x \vec{\nabla}\left(V\vec{E}\right) + \int_{S_R} d^3x\,|\vec{E}|^2\right]$$

r^2

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{\Sigma(S_R)} \left(V\vec{E}\right)\cdot\vec{n}\,dA + \int E^2 d^3x\right] \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d^3x}$$

$\frac{1}{r}$ $\frac{1}{r^2}$

Energia di sistemi di conduttori

- Conduttori
  - carica superficiale (➔σ_ι)
  - superficie equipotenziali (➔V_i)

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2}\int \sigma V\, dA = \frac{1}{2}\sum_i V_i \oint \sigma_i dA_i = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i}$$

Esempio. Condensatore: $U_E = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right) = \frac{1}{2} Q\left(V_1 - V_2\right)$

Esempio

- Energia elettrostatica di 2 sfere conduttrici (cariche Q_1 e Q_2, raggi R_1 e R_2, distanza $d>>R_i$)

$$U_E = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2\right)$$

$$V_1 \simeq \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_2 \simeq \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$U_E = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Energia di mutua interazione.

L' unica presente per cariche puntiformi.

Esempio

- Energia elettrostatica di una sfera di raggio R uniformemente carica

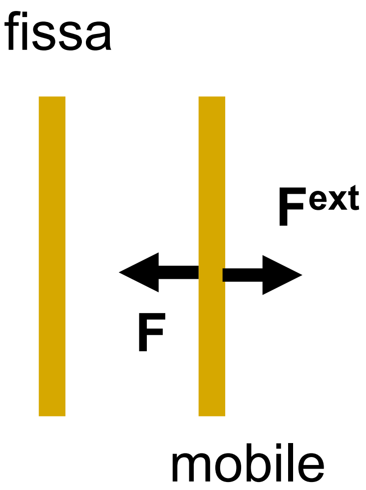
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \quad \Rightarrow U_E = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_R^\infty E^2 4\pi r^2\, dr = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \\ \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r \le R \quad \Rightarrow U_E = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_0^R E^2 4\pi r^2\, dr = \dfrac{1}{5}\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

$$U_E = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{1}{5}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Pressione elettrostatica

- Forza attrattiva tra le armature di un condensatore piano nel vuoto.

$$U_E = \frac{Q^2}{2}\frac{1}{C} = \frac{Q^2}{2}\frac{x}{\varepsilon_0 A}$$



- Forza esterna bilancia **F**
- L'energia cinetica non cambia

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = -\left(\frac{\partial U_E}{\partial x}\right)_{Q=\text{cost}}$$

$$dU_E = dW^{ext} = F^{ext}dx$$

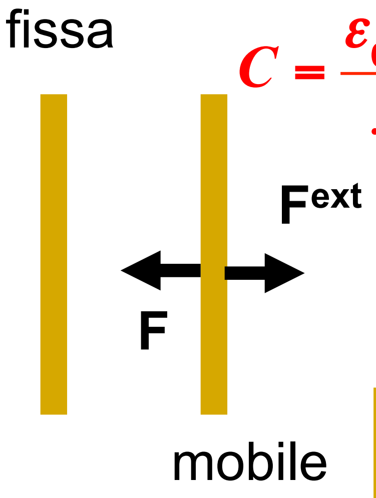
$$dU_E = \frac{Q^2}{2}\frac{dx}{\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{p = \frac{F}{A} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}|\sigma|E}$$

Pressione elettrostatica

- Nell' esempio precedente Q=costante. Supponiamo ora V=costante.
- Il generatore esterno dovra` compiere un lavoro per fornire la carica necessaria a mantenere V=costante.

$$dU_E = dW^{ext} + dW^{gen} = F^{ext}dx + VdQ = F^{ext}dx + V^2 dC$$



$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \qquad dC = -\frac{\varepsilon_0 A}{x^2}dx$$

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0 A}{x}$$

$$dU_E = (F^{ext} - V^2\frac{\varepsilon_0 A}{x^2})dx$$

$$dU_E = -V^2\frac{\varepsilon_0 A}{2x^2}dx$$

$$\boxed{F = -F^{ext} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2x^2} = \left(\frac{\partial U_E}{\partial x}\right)_{V=\text{cost}}}$$

Condensatori