Capacita` di un conduttore isolato

- Carica sulla superficie di un conduttore isolato

$$Q = \oint \sigma(\vec{r})\, dA$$

- Potenziale del conduttore in un punto qualsiasi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\sigma(\vec{r})}{r} dA$$ **(Equipotenziale)**

- La distribuzione di carica tale da rendere nullo il campo all'interno del conduttore e` **unica**

Capacita` di un conduttore isolato

$$Q = \oint \sigma(\vec{r})\, dA \qquad Q \rightarrow \boxed{Q' = \lambda Q} \Rightarrow \sigma \rightarrow \boxed{\sigma' = \lambda \sigma}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\sigma(\vec{r})}{r} dA \qquad \Rightarrow V \rightarrow \boxed{V' = \lambda V}$$

$$\Downarrow$$

Capacita`

farad $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Non varia al variare della carica sul conduttore.
Dipende solo dalla geometria.

Esempio: capacita` di un conduttore sferico di raggio R

- La carica q e` distribuita sulla superficie

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\boxed{C = \frac{q}{V(R)} = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

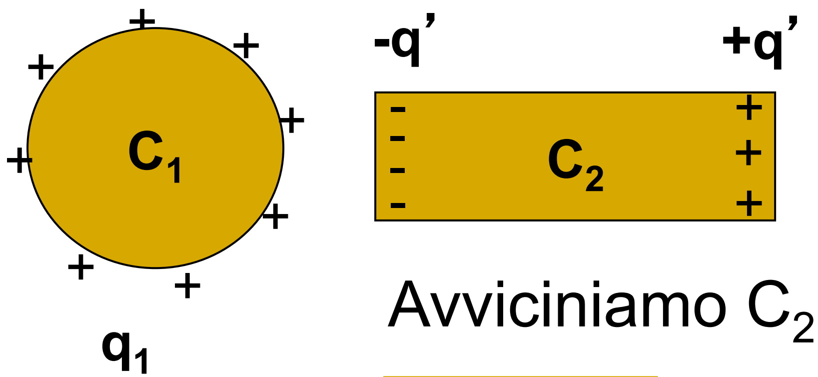
R (m)	C (F)	
0.1	11×10^{-12}	
6.4×10^{6}	0.712×10^{-3}	← capacita` della terra ~ 712 μF
9×10^{9}	1	

Sistemi di conduttori

Conduttore isolato carico C_1

Induzione **incompleta**

(non tutte le linee di forza da C_1 vanno su C_2)



Avviciniamo C_2 scarico

$V_1 \longrightarrow \boxed{V'_1 < V_1}$

viene **aumentato** da +q'
viene **diminuito** da –q' in modo maggiore perche\` -q' e\` piu\` vicina a C_1

$$\Rightarrow \boxed{C_1' = \frac{q_1}{V'_1} > \frac{q_1}{V_1} = C_1}$$

Sistemi di conduttori

- 2 conduttori isolati nel vuoto
- Cariche Q_1 e Q_2
- Superficie Σ_1 e Σ_2

- per ciascun conduttore:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = -\oint_\Sigma \vec{\nabla}V\cdot\vec{n}\,dA = -\oint_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n}dA$$

Sistemi di conduttori

$$V(\vec{r}) = \boxed{V_1\phi_1(\vec{r}) + V_2\phi_2(\vec{r})}$$

Soluzione dell'equazione di Laplace (unica), con ϕ_i che si annullano all'infinito, e $\phi_i = 1$ su Σ_i (sovrapposizione effetti)

$$Q_1 = -\varepsilon_0 \oint_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial n} dA$$

$$Q_2 = -\varepsilon_0 \oint_{\Sigma_2} \frac{\partial V}{\partial n} dA$$

Sistemi di conduttori

$$V(\vec{r}) = V_1 \phi_1(\vec{r}) + V_2 \phi_2(\vec{r})$$

Soluzione dell'equazione di Laplace (unica), con ϕ_i che si annullano all'infinito, e $\phi_i = 1$ su Σ_i (sovrapposizione effetti)

$$Q_1 = -\varepsilon_0 \oint_{\Sigma_1} \left(V_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + V_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dA$$

$$Q_2 = -\varepsilon_0 \oint_{\Sigma_2} \left(V_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + V_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dA$$

Sistemi di conduttori

$$V(\vec{r}) = V_1\phi_1(\vec{r}) + V_2\phi_2(\vec{r})$$

Soluzione dell'equazione di Laplace (unica), con ϕ_i che si annullano all'infinito, e $\phi_i = 1$ su Σ_i (sovrapposizione effetti)

$$Q_1 = -\varepsilon_0 \oint_{\Sigma_1} \left(V_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + V_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dA = c_{11}V_1 + c_{12}V_2$$

$$Q_2 = -\varepsilon_0 \oint_{\Sigma_2} \left(V_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + V_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dA = c_{21}V_1 + c_{22}V_2$$

Sistemi di conduttori

$$\begin{cases} Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \cdots c_{1n}V_n \\ Q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \cdots c_{2n}V_n \\ \cdots \\ Q_n = c_{n1}V_1 + c_{n2}V_2 + \cdots c_{nn}V_n \end{cases}$$

$$Q = CV$$

(notazione matriciale)

$$c_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{coefficienti di capacita`} \\ i \neq j & \text{coefficienti di induzione} \end{cases}$$

$$c_{ii} > 0$$

$$c_{ij} < 0$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

Noti i coefficienti di capacita` e di induzione di un sistema di conduttori, se sono specificati i potenziali a cui sono tenuti si possono determinare le cariche.

Sistemi di conduttori

- La matrice c_{ij} e` invertibile

$$V_i = a_{i1}Q_1 + a_{i2}Q_2 + \ldots + a_{in}Q_n = a_{ij}Q_j$$

Fornisce i potenziali dei conduttori note le loro cariche

Coefficienti di potenziale

$$a_{ij} > 0$$

$$a_{ij} > a_{ii}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Sistemi di conduttori

Supponiamo che: $Q_1 \neq 0, \quad Q_2 = Q_3 = \cdots Q_n = 0$

Il potenziale dei vari conduttori e` proporzionale alla carica Q_1

$$\left(V = \oint_{\Sigma_1} \frac{\sigma_1 dA}{r},\ Q_1 = \oint_{\Sigma_1} \sigma_1 dA \ \Rightarrow\ \lambda Q_1 \rightarrow \lambda\sigma_1 \rightarrow \lambda V\right)$$

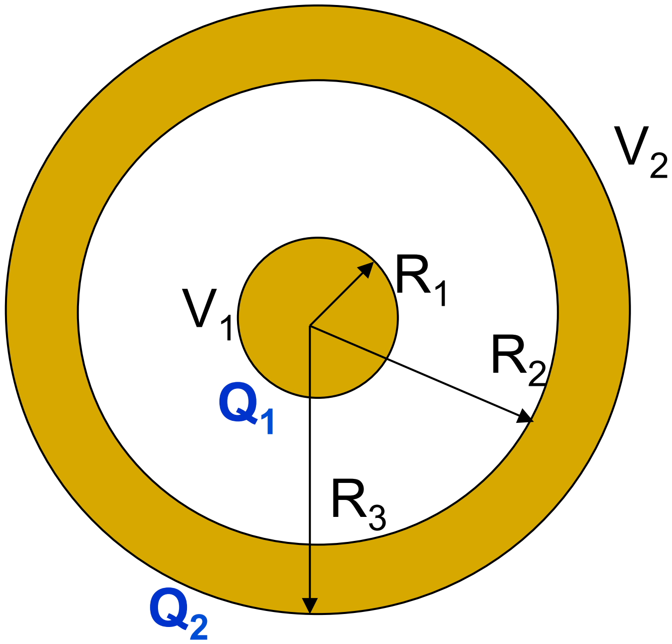
$$V_1 = a_{11}Q_1 \quad , \quad V_2 = a_{21}Q_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad V_n = a_{n1}Q_1$$

Annullando tutte le cariche tranne una alla volta e sommando i potenziali (principio di sovrapposizione) si ottiene il sistema visto.

Dato che il potenziale ha il segno della carica, ne segue che i coefficienti sono positivi.

Esempio: 2 conduttori sferici concentrici

$$V_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2$$
$$V_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2$$



Mettiamo una carica **Q**$_1$ sul conduttore **interno**.

Quello esterno ha carica totale nulla.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_1}{R_3} = 4\pi\varepsilon_0 V_1 \\ &\frac{Q_1}{R_3} = 4\pi\varepsilon_0 V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) \\ a_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3} \end{cases}$$

Ora mettiamo Q_2 su quello esterno.

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3} = a_{12} \\ a_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3} \end{cases}$$

Esempio: 2 conduttori sferici concentrici

$$\begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) \\ a_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3} = a_{12} \\ a_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3} \end{cases} \qquad C = A^{-1}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3^2}\right] = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{R_3}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$c_{11} = \frac{a_{22}}{\det A} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}} \qquad c_{12} = c_{21} = -\frac{a_{12}}{\det A} = -c_{11} \qquad c_{22} = \frac{a_{11}}{\det A} = \frac{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}{\dfrac{1}{R_3}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)}$$

Esempio: 2 conduttori sferici concentrici

$$Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}(V_1 - V_2) = c_{11}(V_1 - V_2)$$

$$\boxed{c_{11} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

La carica Q_1 dipende solo dalla d.d.p. tra i conduttori

$$Q_1 + Q_2 = (c_{22} - c_{11})V_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_2 = C V_2$$

C e` la capacita` del conduttore esterno. La sua carica Q_1+Q_2 e` la somma della carica Q_2 introdotta dall' esterno e della carica Q_1 indotta dall' interno.

Condensatori

- Consideriamo 2 conduttori tra i quali ci sia induzione completa. Il sistema si chiama **condensatore**. I due conduttori si chiamano **armature**.

$$Q_1 = Q \quad V_1 = a_{11}Q - a_{12}Q = Q(a_{11} - a_{12})$$

$$Q_2 = -Q \, V_2 = a_{12}Q - a_{22}Q = Q(a_{12} - a_{22})$$

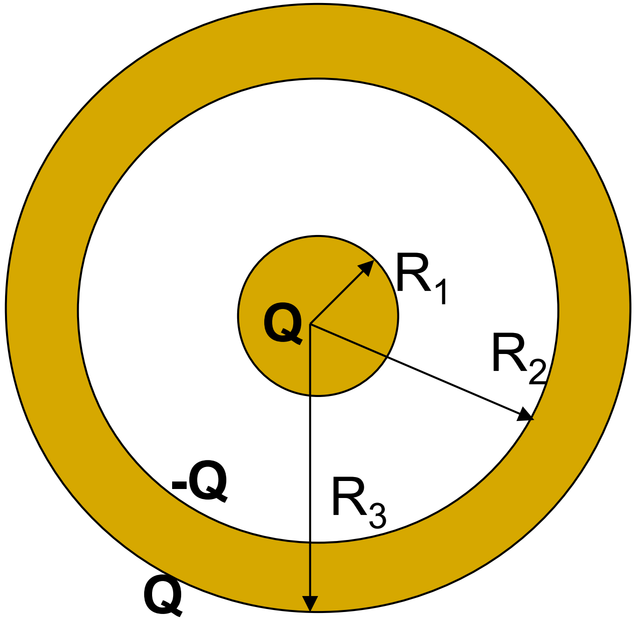
$$\boxed{V_1 - V_2 = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12})Q = \frac{Q}{C}}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}}}$$

capacita` del condensatore

dipende solo dalla geometria (e dal mezzo tra le armature)

Esempio. Capacita` di un condensatore sferico.



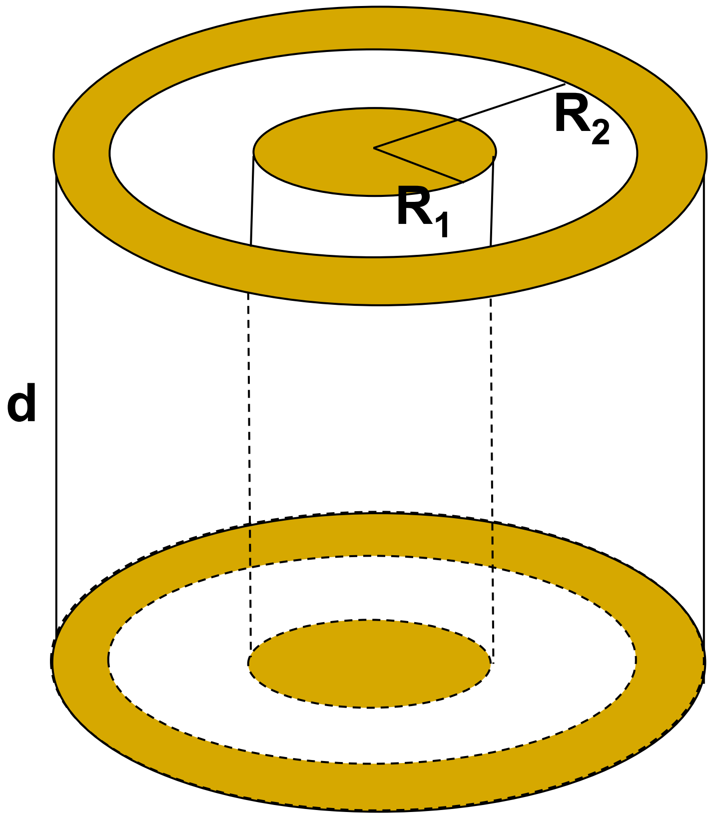
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$\lim_{R_2 \to \infty} C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

(conduttore sferico isolato: 1 armatura all' infinito)

Esercizio: calcolare la capacita` nel limite $h=R_2-R_1 << R_1 \sim R_2=R$
Valutarla per h=1 mm, R=1 m

Capacita` di un condensatore cilindrico.



Abbiamo visto che:

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R_2}{R_1}$$

$$Q = \lambda d \qquad C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\log\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\boxed{\frac{C}{d} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log\frac{R_2}{R_1}}}$$

supponiamo $d >> R_{1,2}$

Esercizio: calcolare il limite per $h = R_2 - R_1 << R_1, R_2 \approx R$

Capacita` di un condensatore piano.

- Due conduttori piani paralleli, di area A, distanti h.
- Le supponiamo grandi, per trascurare gli effetti ai bordi.

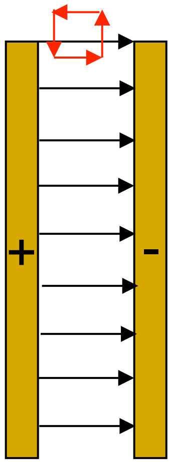
$$V_1 - V_2 = hE = h\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = h\frac{\sigma A}{\varepsilon_0 A} = h\frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 A}{h}}$$

A meno di effetti ai bordi

Effetti di bordo

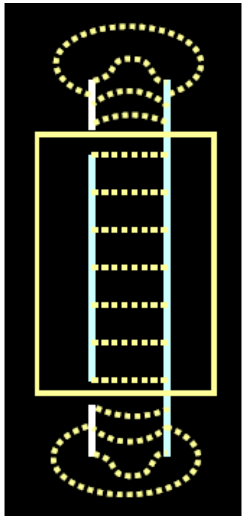
- Le espressioni delle capacita` dei condensatori piani e cilindrici sono corrette solo nel limite di armature di estensione infinita



Se ci fosse una transizione netta tra campo regolare e campo nullo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

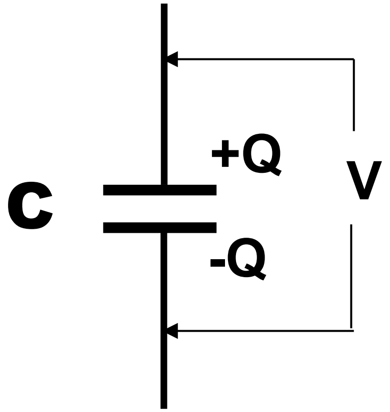
(impossibile, **E** e` conservativo)

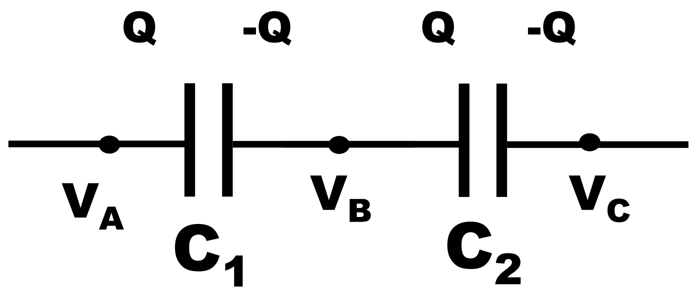


Collegamento di condensatori

- Il condensatore e` un dispositivo che puo` immagazzinare carica elettrica
- E` globalmente neutro, ma mantiene una carica +Q ed una –Q separate spazialmente
- Collegando le armature si provoca il movimento di elettroni da un'armatura all'altra e il condensatore si scarica
- Si possono collegare piu` condensatori tra loro formando dei condensatori equivalenti

Collegamento di condensatori





serie

$$\boxed{V_A - V_C = \frac{Q}{C}}$$

$$V_A - V_C = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1}$$

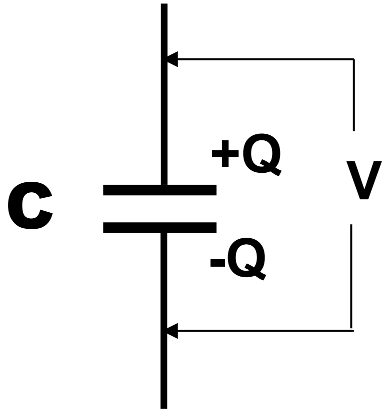
$$V_B - V_C = \frac{Q}{C_2}$$

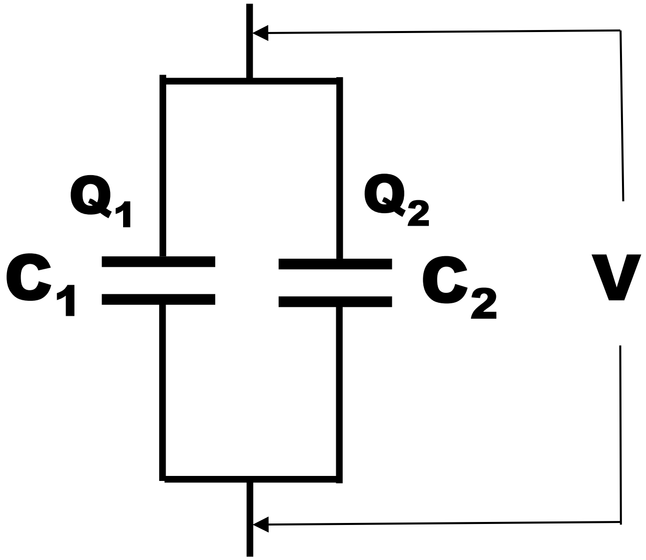
$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Collegamento di condensatori

$$Q = Q_1 + Q_2$$

parallelo





$$Q = \frac{C}{V} = \frac{C_1}{V} + \frac{C_2}{V}$$

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

Collegamento di condensatori

- n condensatori in serie:

$$\boxed{C^{-1} = \sum_{i=1}^{n} C_i^{-1}}$$

- n condensatori in parallelo:

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$