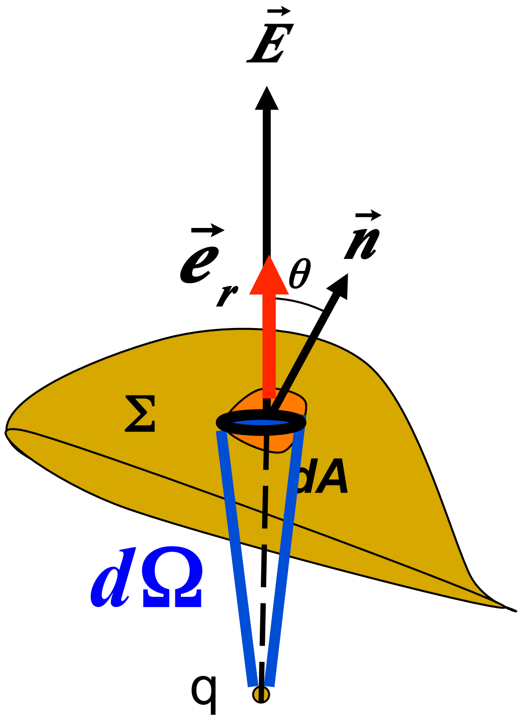
Legge di Gauss

- Legge di Gauss in forma integrale e locale
- Esempi
- Equazioni di Poisson e di Laplace
- Problemi di Dirichlet e Neumann
- Problema generale dell'elettrostatica

Legge di Gauss

- Superficie Σ immersa nel campo elettrostatico generato da una carica q



$$d\Phi(\vec{E}) \equiv \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}\, dA}{r^2} = d\Omega$$

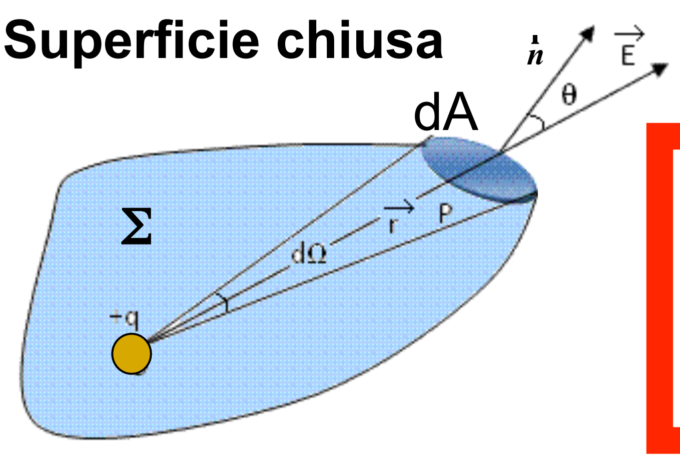
$$\boxed{d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega}$$

dipende solo dall' angolo solido

$$dA \propto r^2$$

$$E \propto r^{-2}$$

Legge di Gauss



Carica interna

$$\Phi(\vec{E}) = \int d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Carica esterna

$$\Phi(\vec{E}) = 0$$

"tanto flusso entra quanto esce"

Il campo incontra 2 volte la superficie sotto lo stesso angolo solido
L'orientamento dei due elementi intercettati e` opposto

Legge di Gauss

- n-cariche: principio di sovrapposizione

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \vec{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- distribuzioni continue di carica elettrica

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma(V)} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x})\, d^3x$$

(e simili per distribuzioni superficiali e lineari)

Legge di Gauss

- *"Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa e` uguale alla somma delle cariche elettriche contenute nel volume racchiuso dalla superficie divisa per ε_0, comunque siano distribuite le cariche"*

Legge di Gauss

- **La legge di Gauss e` dovuta al fatto che valgono la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione**

- E` attraverso la legge di Gauss che si sottopone a verifica sperimentale la legge di Coulomb

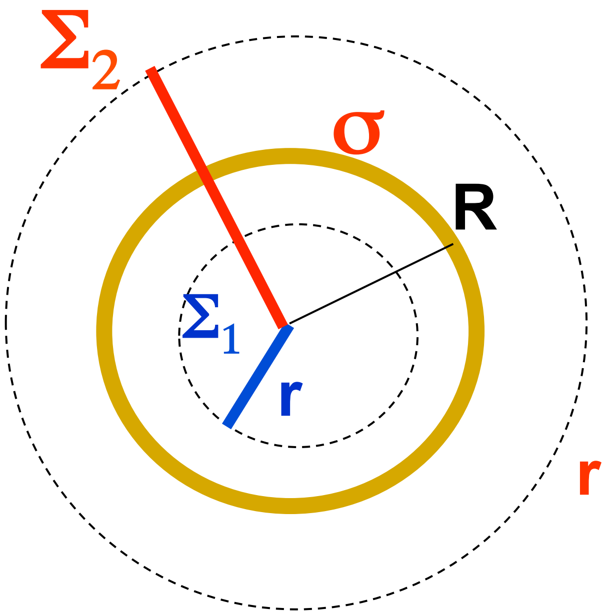
(e anche verificando che la massa del fotone $m_\gamma=0$)

Legge di Gauss

- **La legge di Gauss e` dovuta al fatto che valgono la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione**

- Importante teoricamente, e` anche utile in problemi pratici quando ci sono simmetrie

Esempio. Sfera con superficie uniformemente carica.



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

r > R $$\oint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \oint_{\Sigma_2} E(r)\overbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}^{=1}\,dA$$

$$E(r)\oint_{\Sigma_2} dA = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\sigma R^2}{\varepsilon_0}$$

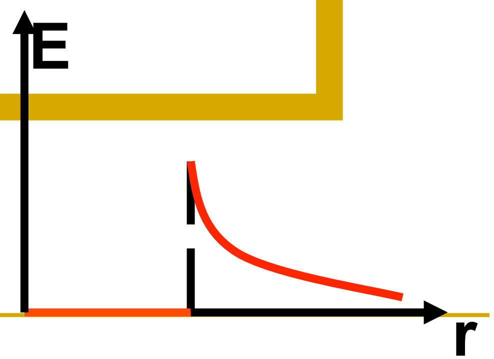
r < R $$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = 0$$

Esempio. Sfera cava con superficie uniformemente carica.

$$E(r)4\cancel{\pi} r^2 = \frac{4\cancel{\pi}\sigma R^2}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(r > R)}$$

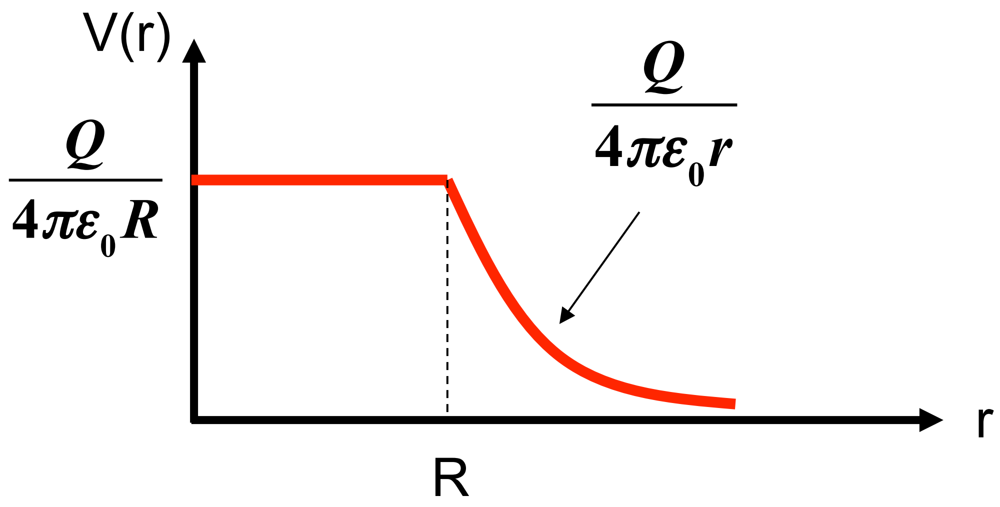
$$\boxed{E(r) = \begin{cases} 0 & r \le R \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r \ge R \end{cases}}$$

Come per una carica puntiforme nel centro della sfera (r>R)

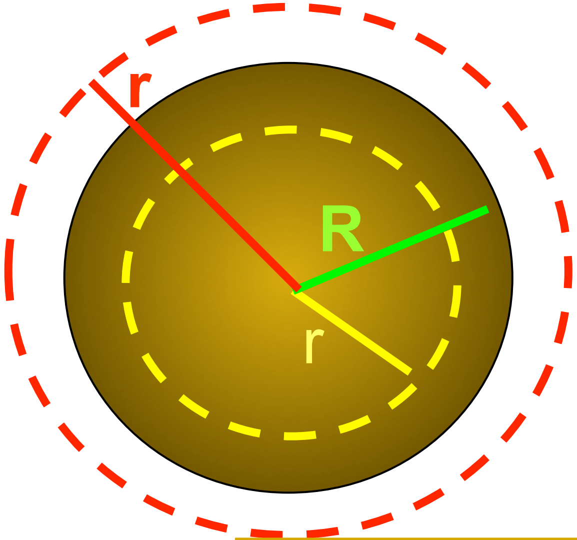


Potenziale sfera cava con superficie unif. carica

- Il potenziale V(r) all' esterno e` come per una carica puntiforme Q
- All' interno e` costante e prende il valore V(R)



Esempio.
Sfera uniformemente carica.



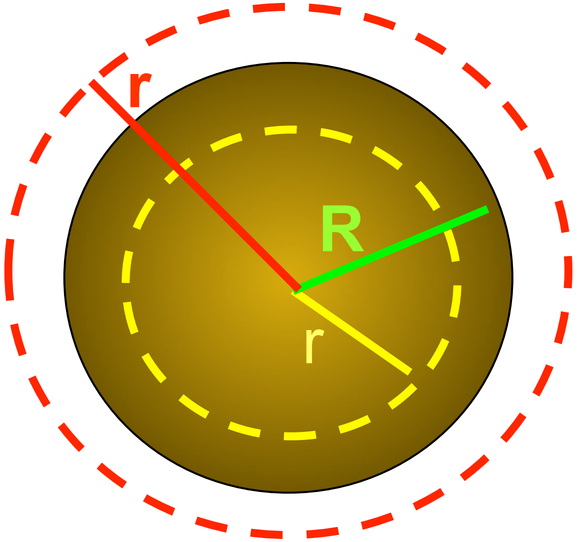
$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

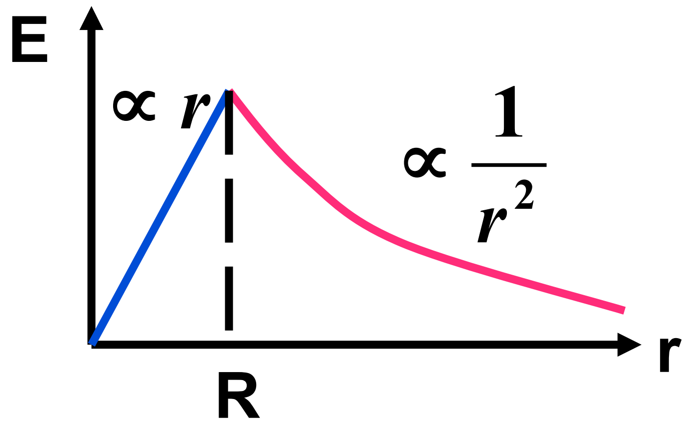
$$\Phi(E) = E(r)\oint_{\Sigma} dA = E(r)4\pi r^2$$

$$r < R \quad \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = E(r)4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$r \geq R \quad \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = E(r)4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Esempio.
Sfera uniformemente carica.



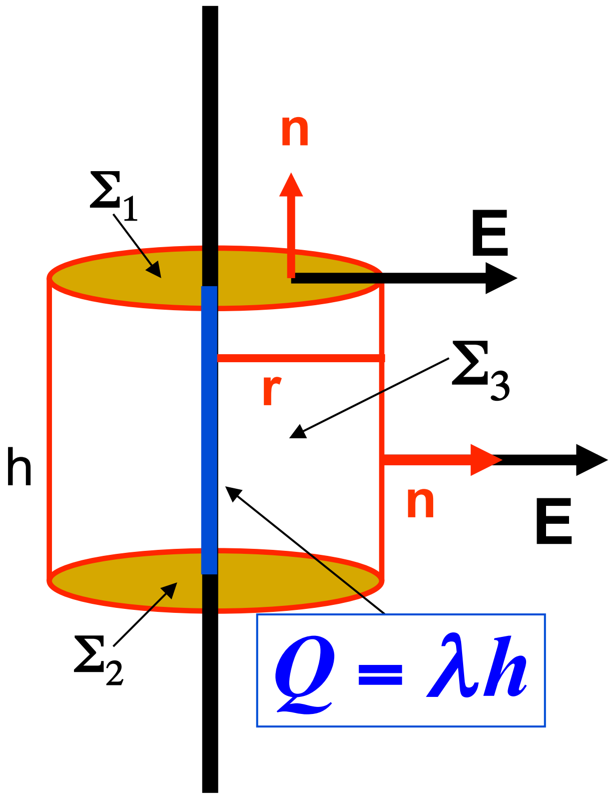


$$r \geq R \qquad V(r) = \int_r^\infty E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

$$r \leq R \qquad V(r) - V(R) = \int_r^R E(r)\,dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_r^R r\,dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$$

Esempio. Filo uniformemente carico.



$$Q = \lambda h$$

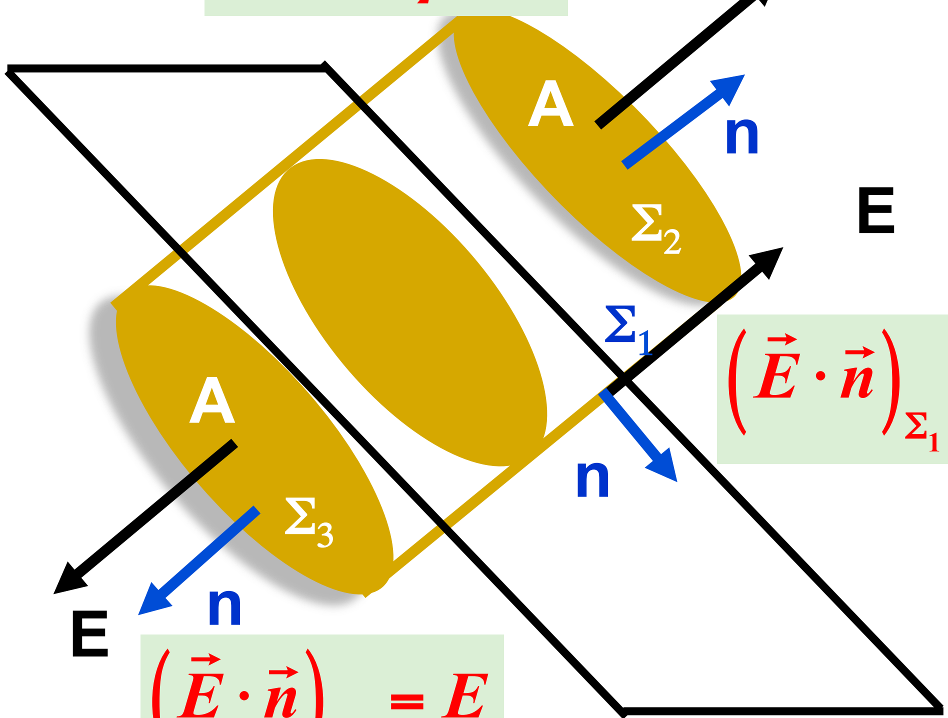
$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = 0$$

$$\Phi_{\Sigma_3}(\vec{E}) = 2\pi r \cancel{h} E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

Esempio. Piano indefinito uniformemente carico.



$$\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)_{\Sigma_2} = E$$

$$\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)_{\Sigma_1} = 0$$

$$\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)_{\Sigma_3} = E$$

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) + \Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) + \Phi_{\Sigma_3}(\vec{E})$$

$$= \Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) + \Phi_{\Sigma_3}(\vec{E})$$

$$= 2AE$$

$$2\cancel{A}E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\cancel{A}\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}}$$

Forma differenziale (locale) della legge di Gauss

- Usiamo il teorema della divergenza

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma_V} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$$

- Per la legge di Gauss

$$=$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_V \rho\, dV$$

Forma differenziale (locale) della legge di Gauss

- Quindi: $$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \bar{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0$$

- Ma il volume V e` arbitrario. La relazione deve valere per qualsiasi volume V.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}}$$

- Il campo elettrostatico e` **conservativo**
- Le cariche elettriche sono **sorgenti** del campo elettrostatico. Valgono la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione.

Equazione di Poisson

- Equazione per il potenziale elettrostatico
- Combina le due equazioni di Maxwell

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Conservativo } \nabla\times\vec{E}=0 \Rightarrow & \vec{E}=-\vec{\nabla}V \\ \text{Coulomb + sovrapposizione} & \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}V\right) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Equazione di Poisson

- Se le sorgenti si annullano abbastanza rapidamente all'infinito

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Equazione di Laplace

- Nel vuoto (in assenza di cariche elettriche)

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Equazione di Laplace

Problemi di Dirichlet e Neumann

- Note le distribuzioni delle sorgenti del campo si determina il potenziale risolvendo l'equazione di Poisson (complicato)

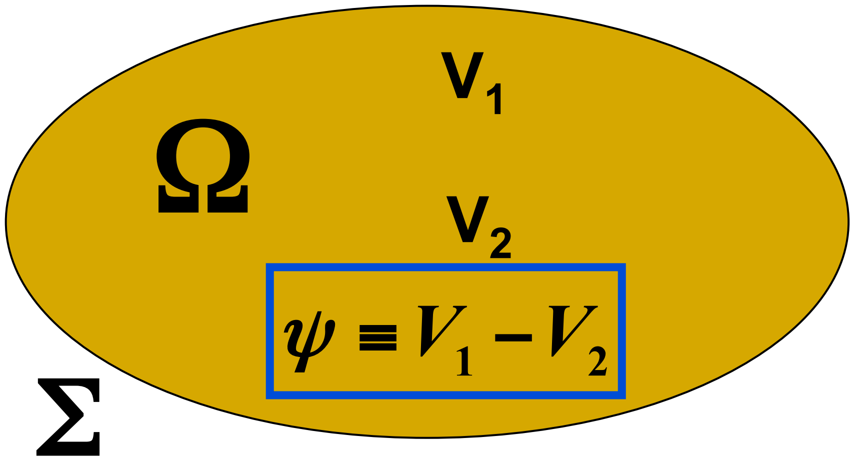
- In pratica spesso sono noti il **potenziale** su una superficie (problema di Dirichlet)

- oppure il **campo elettrico** su una superficie (la derivata normale del potenziale) (problema di Neumann)

Unicita` della soluzione (*)

Si basa sull'esistenza della soluzione dell'equazione di Laplace.

La assumiamo.



condizioni al contorno su Σ

- V_1 e V_2 siano soluzioni dell'eq. di Poisson entro Ω
- V_1 e V_2 soddisfano le stesse condizioni al contorno su Σ
- Poniamo $\Psi = V_1 - V_2$

Unicita` della soluzione (*)

$$\Psi \equiv V_1 - V_2$$

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ω

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

Σ

Dirichlet

$$\left(V_1\right)_\Sigma = \left(V_2\right)_\Sigma \Rightarrow \left(\Psi\right)_\Sigma = 0$$

Neumann

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_\Sigma = \left(\frac{\partial V_2}{\partial n}\right)_\Sigma \Rightarrow \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)_\Sigma = 0 = \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{n}$$

Unicita` della soluzione (*)

$$\Psi \equiv V_1 - V_2 \qquad \nabla^2\Psi = 0$$

$$\int_\Omega \vec{\nabla}\cdot(\Psi\vec{\nabla}\Psi)dV = \int_\Omega (\Psi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\Psi)dV$$

teor. diverg.

$$= \int_\Omega (\underbrace{\Psi\nabla^2\Psi}_{=0} + |\vec{\nabla}\Psi|^2)dV$$

$$= \oint_\Sigma (\Psi\vec{\nabla}\Psi)\cdot\vec{n}\,dA$$

$$\boxed{= \oint_\Sigma \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n}dA \quad = \int_\Omega (|\vec{\nabla}\Psi|^2)dV}$$

Unicita` della soluzione (*)

$$\oint_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dA = \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2 dV$$

= 0 Neumann

= 0 Dirichlet

$$\Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\Psi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

Dirichlet $\Psi = 0$ ($V_1 = V_2$)

$$\Rightarrow \Psi \quad \text{costante}$$

Neumann $V_1 = V_2 + \text{cost.}$

Problema generale dell'elettrostatica

- Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio quando per M conduttori sono fissati i potenziali e per i rimanenti N sono note le cariche possedute

- Nello spazio esterno ai conduttori vale l'equazione di Laplace

Problema generale dell'elettrostatica

- Si risolve il problema di Dirichlet, identificando le soluzioni dell'equazione di Laplace che soddisfano le condizioni al contorno specificate
- Dal potenziale si calcola il campo elettrico nei punti infinitamente vicini alla superficie dei conduttori

Problema generale dell'elettrostatica

- Dal campo elettrico sulla superficie si ottiene la densita` di carica superficiale ($\sigma=\varepsilon_0 E$) e da questa la carica totale Q

- Per gli N conduttori in cui sono note le cariche si deve risolvere il problema di Neumann (piu` complesso)