Potenziale elettrostatico e lavoro

- Potenziale elettrostatico
- Energia potenziale elettrostatica
- Esempi
- Moto di una carica in un potenziale e.s.

Potenziale elettrostatico

- Campo e.s. generato da una carica puntiforme

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\vec{\nabla}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) = -\vec{\nabla}V(r)}$$

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C}$$

scegliendo lo zero all'infinito: C=0

Potenziale elettrostatico

- In base al principio di sovrapposizione

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \boxed{\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}$$

Il potenziale generato da un insieme di cariche puntiformi e` dato dalla somma dei potenziali generati da ciascuna di esse.

Potenziale elettrostatico
(definininizone operativa)

- Le forze elettrostatiche sono conservative
- Cariche in posizioni fissate
- Carica di prova q da A a B: ferma in A, ferma in B ➔ non cambia la sua energia cinetica
- No scambi energetici tra q e le cariche che generano il campo
- $W = W^{ext}_{AB} + W^{el}_{AB} = W^{ext}_{AB} + q(V_A - V_B) = 0$

$$V_B - V_A = \frac{W^{ext}_{AB}}{q} \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{W^{ext}_{AB}}{q} + V_A$$

Lavoro e forza elettromotrice

tensione elettrica

$$\Delta W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q\mathcal{E} = 0$$

forza elettromotrice
f.e.m.

campo elettrostatico

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

(forma locale: eq. di Maxwell)

- In un campo elettrostatico la f.e.m. e` sempre uguale a zero

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} = U_A - U_B \Longrightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{x} = V_A - V_B$$

energia potenziale elettrostatica

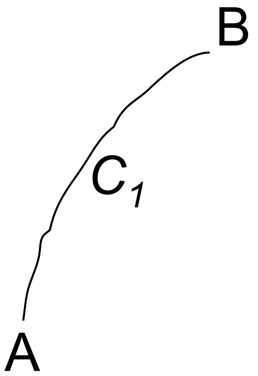
potenziale elettrostatico

$$\boxed{U = q\,V}$$

Forza elettromotrice

$\vec{F}$ forza su una carica q (anche meccanica, chimica)

$\vec{F} = q\vec{E}$ ← **campo elettromotore**



lavoro compiuto dalla forza per spostare la carica da A a B lungo la curva C_1

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

tensione elettrica tra A e B relativa a C_1

In generale: $\Delta W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q\mathcal{E}$

f.e.m. relativa al circuito

Differenza di potenziale

- In presenza di un insieme discreto di cariche puntiformi

$$\boxed{V_A - V_B = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{Ai}} - \frac{1}{r_{Bi}}\right)}$$

Lavoro della forza elettrostatica per lo spostamento di una carica q da A a B

$$\Delta W_{A\rightarrow B} = U_A - U_B = -\Delta U$$

$$\Delta U = U_{\text{finale}} - U_{\text{iniziale}} = U_B - U_A \qquad \Delta W = -\Delta U$$

Potenziali da distribuzioni continue di carica elettrica

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}d^3x'$$

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}dA'$$

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}dl'$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Unita` di misura

$$[V] = \frac{[W]}{[Q]}$$

$$\boxed{\text{Volt} \qquad 1\ \mathrm{V} = \frac{1\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{C}}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \qquad [E] = \frac{[V]}{[L]} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

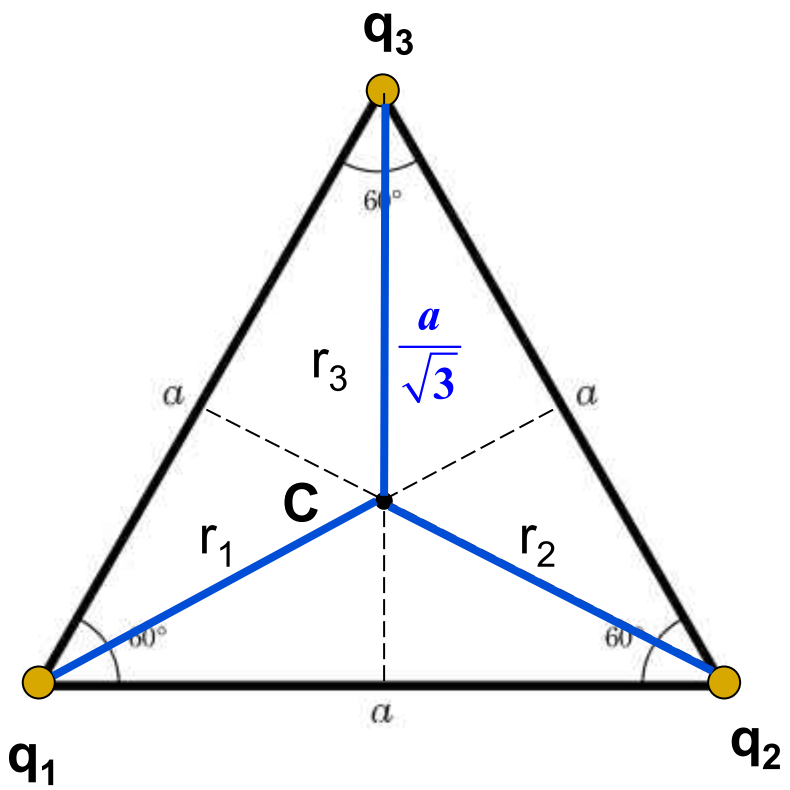
Potenziale

- Calcolo del campo elettrico:
  - 3 integrali sulle distribuzioni di carica ($\sim x_i/r^3$)
  - potenziale 1 integrale ($\sim 1/r$) + 3 derivate
- Differenze di potenziale (gradiente) = forza
- Concetto primitivo rispetto a quello di forza

Esempio

Cariche ai vertici di un triangolo equilatero.

Calcolare il potenziale nel centro C del triangolo.

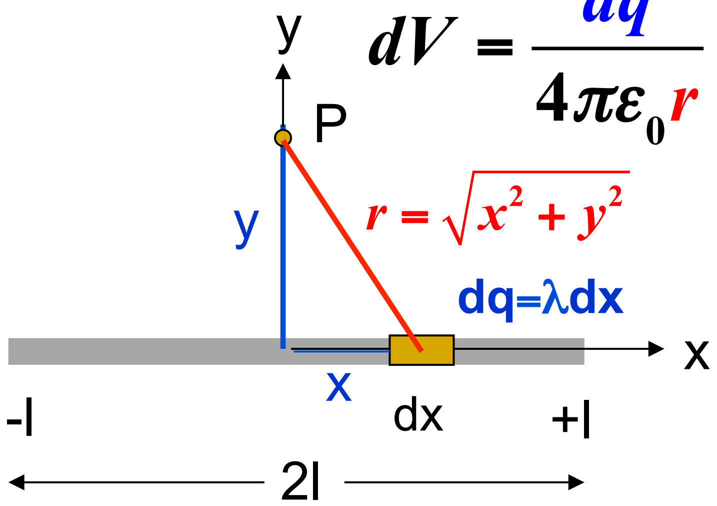


$$V_C = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a}(q_1 + q_2 + q_3)$$

Esempio

Potenziale elettrostatico generato sull' asse di un filo uniformemente carico

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$dV = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x = y\sinh t \quad \Longrightarrow \quad dx = y\cosh t\, dt$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \quad = \quad y\cosh t$$

oppure ... **formulario:** $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+d^2\right)}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+d^2}\right|_{x_1}^{x_2}$

$$V(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\frac{\sqrt{y^2+l^2}+l}{\sqrt{y^2+l^2}-l}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow E(y) = -\frac{dV}{dy}$$

$$E(y) = -\frac{dV}{dy} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dy}\log\frac{\sqrt{y^2+l^2}+l}{\sqrt{y^2+l^2}-l}$$

$$E(y) = \frac{2\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{l^2+y^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{l^2+y^2}}$$

V(y) singolare per $l \rightarrow \infty$ **E(y) regolare** per $l \rightarrow \infty$

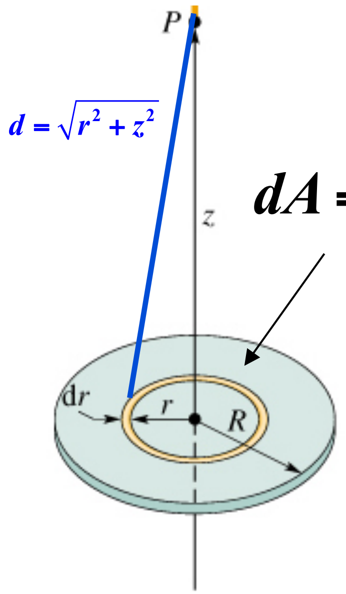
$$V(y) \simeq \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\frac{2l+\frac{y^2}{2l}}{\frac{y^2}{2l}} \simeq \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\frac{4l^2}{y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\log(2l)-\log y\right]$$

termine formalmente infinito si **elide** nelle **differenze di potenziale**

Esempio

- Potenziale sull'asse centrale di un disco sottile uniformemente carico con densita` superficiale di carica σ

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\sigma dA}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

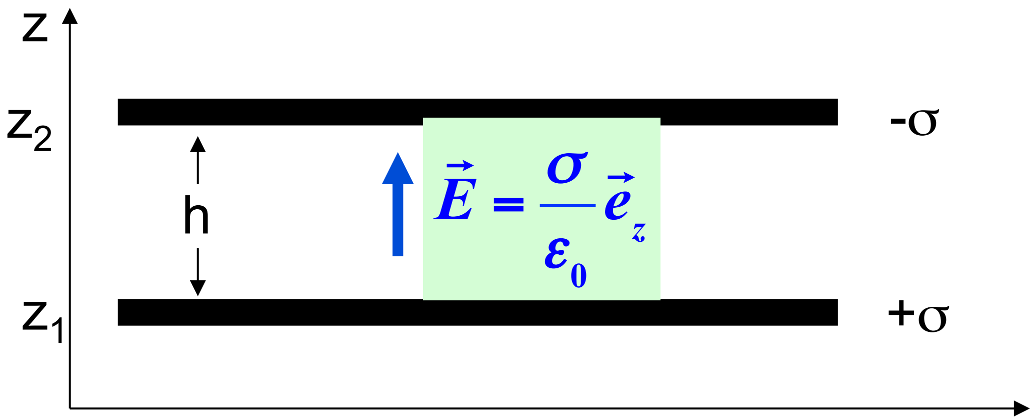


$$dA = 2\pi r dr$$

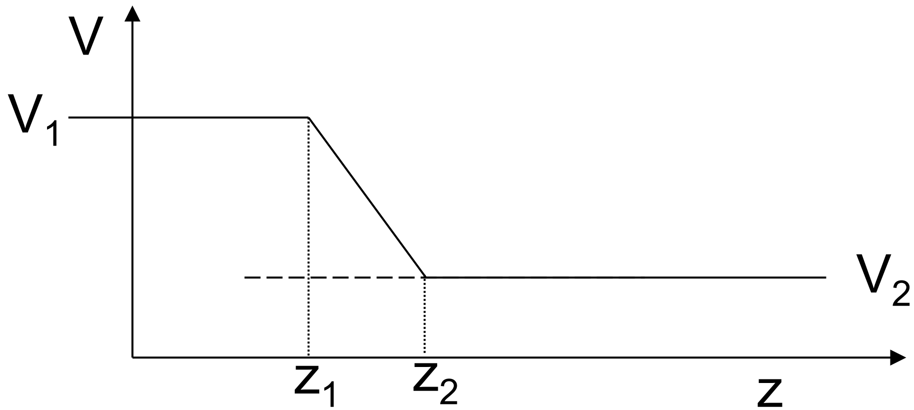
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right)$$ (per z>0)

Esempio: potenziale tra due piani indefiniti con densita` di carica +σ e -σ



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$



$$dV = -E dz$$

$$V = -Ez + C$$

$$\boxed{V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + C}$$

$$V(z_1) - V(z_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h$$

Energia potenziale elettrostatica

Nel campo elettrostatico generato dalla carica Q, l' energia potenziale di una carica q e`:

$$U(r) = qV(r) = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta W_{AB}^{elettr} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_A - U_B = -\Delta U$$

$$\boxed{\Delta W_{r\to\infty}^{elettr} = \int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty \vec{\nabla}U\cdot d\vec{r} = -\left[U_\infty - U(r)\right] \equiv U(r)}$$

Energia potenziale elettrostatica

$$\Delta W_{r\to\infty}^{elettr} = \int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = -\left[U_\infty - U(r)\right] \equiv U(r)$$

Energia potenziale elettrostatica di una carica q =

lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per portare la carica q dal punto in cui si trova all'infinito

Energia potenziale elettrostatica

$$\Delta W^{elettr}_{r\to\infty} = \int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty \vec{\nabla}U\cdot d\vec{r} = -\left[U_\infty - U(r)\right] \equiv U(r)$$

Energia potenziale elettrostatica di una carica q =

lavoro compiuto da una forza esterna per portare la carica q dall'infinito al punto considerato

Energia potenziale elettrostatica

$$\Delta U = -\Delta W$$

- **Cariche dello stesso segno (qQ > 0)**

$$U(r) > 0$$

- forza elettrostatica repulsiva
- nell'allontanamento l'energia potenziale diminuisce
- lavoro fornito dalla forza elettrostatica verso l'esterno
- (lavoro negativo della forza esterna)

- **Cariche di segno opposto (qQ < 0)**

$$U(r) < 0$$

- forza elettrostatica attrattiva
- nell'allontanamento l'energia potenziale aumenta
- lavoro compiuto dalla forza per allontanarle

Energia potenziale di un sistema di N cariche fisse

Sistema = carica q + N sorgenti di campo elettrostatico

Energia potenziale del sistema: $U_q + U_{sorgenti}$

Le sorgenti sono fisse: $U_{sorgenti}$ sparisce dalle differenze di potenziale

$$\Delta U = \Delta U_q$$

Energia potenziale di un sistema di N cariche fisse

$$(q_i, q_j) \Rightarrow U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Somma sulle coppie e divisione per due (double counting)

Ignoriamo il termine di “autoenergia”

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{q_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} q_i \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} q_i V_{ij}$$

Moto di una carica in un campo elettrostatico

- Carica q in un campo elettrostatico $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \boxed{\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

- In un campo elettrostatico possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica totale

Moto di una carica in un campo elettrostatico

- Campo elettrostatico costante lungo l'asse z

$$\boxed{\frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 + U_B = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2 + U_A}$$

$$U = qV(z) = -qEz + C$$

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 - qEz_B = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2 - qEz_A$$

$$\boxed{\mathrm{v}_B^2 = \mathrm{v}_A^2 + \frac{2q}{m}E(z_B - z_A)}$$

L'elettronvolt (eV)

- Energia cinetica acquistata da una carica e accelerata da una differenza di potenziale di 1 V

$$1\ \mathrm{eV} = e\Delta V = (1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})\times(1\ \mathrm{V}) = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Scale energetiche tipiche

membrana cellulare:	10^{-2} - 10^{-1} eV	
elettrone atomo H	27 eV	
energia delle reazioni nucleari (stelle):	MeV	(1 MeV = 10^6 eV)
energia della "unificazione" elettrodebole:	100 GeV	(1 GeV = 10^9 eV)
energia di "Grande Unificazione":	10^{15} GeV	(Forza forte ~ elettrodebole)
energia di Planck:	10^{19} GeV	(Forza gravitazionale ~ come le altre)