Cooordinate curvilinee ortogonali (richiami generali)

$$\vec{x} = \vec{x}(q_1, q_2, q_3) = x(q)\vec{e}_x + y(q)\vec{e}_y + z(q)\vec{e}_z$$

Fissati q_2 e q_3 al variare di q_1 viene percorsa la linea coordinata 1 vista nel sistema di riferimento cartesiano, e similmemte per le coordinate 2 e 3.

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$$ tangente alla linea coordinata “i”

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = h_i(q)\vec{u}_i(q)$$

$\vec{u}_i(q)$
versore

$$\boxed{h_i = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right|}$$

Il sistema curvilineo delle q e\` detto ortogonale se:

$$\vec{u}_i(q) \cdot \vec{u}_j(q) = \delta_{ij}$$

Coordinate curvilinee ortogonali: elementi di linea, area e volume

Elemento di linea: $d\vec{r} = dq_1 h_1 \vec{u}_1 + dq_2 h_2 \vec{u}_2 + dq_3 h_3 \vec{u}_3$

Elemento di arco i : $ds_i = h_i dq_i$

Elemento di arco spaziale: $ds^2 = |d\vec{r}|^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$

Elementi di area ortogonali alle linee coordinate 1,2 e 3 ($dA_{1,2,3}$) ed elemento di volume dV

$$dA_1 = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$$

$$dA_2 = ds_1 ds_3 = h_1 h_3 dq_1 dq_3$$

$$dA_3 = ds_1 ds_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$$

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Coordinate curvilinee ortogonali: gradiente

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} f)_1 h_1 dq_1 + (\vec{\nabla} f)_2 h_2 dq_2 + (\vec{\nabla} f)_2 h_2 dq_2$$

ma e` anche:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3$$

confrontando:

$$\boxed{(\vec{\nabla} f)_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} \quad , \quad (\vec{\nabla} f)_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} \quad , \quad (\vec{\nabla} f)_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}}$$

Coordinate curvilinee ortogonali: divergenza

DIVERGENZA = DENSITA` DI FLUSSO

CALCOLO DEL FLUSSO ATTRAVERSO LE FACCE DI UN VOLUMETTO INFINITESIMO $dV=ds_1ds_2ds_3$

2 aree elementari perpendicolari alla **direzione 1** nelle posizioni q_1+dq_1 e q_1 (area $dA_1=ds_2ds_3$):

$$(F_1 ds_2 ds_3)_{q_1+dq_1} - (F_1 ds_2 ds_3)_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 ds_2 ds_3)\,dq_1$$

Coordinate curvilinee ortogonali: divergenza

DIVERGENZA = DENSITA` DI FLUSSO

CALCOLO DEL FLUSSO ATTRAVERSO LE FACCE DI UN VOLUMETTO INFINITESIMO $dV=ds_1ds_2ds_3$

2 aree elementari perpendicolari alla **direzione 1** nelle posizioni q_1+dq_1 e q_1 (area $dA_1=ds_2ds_3$):

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 ds_2 ds_3)dq_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3)dq_1 dq_2 dq_3$$

Coordinate curvilinee ortogonali: divergenza

DIVERGENZA = DENSITA` DI FLUSSO

CALCOLO DEL FLUSSO ATTRAVERSO LE FACCE DI UN VOLUMETTO INFINITESIMO $dV=ds_1ds_2ds_3$

2 aree elementari perpendicolari alla **direzione 1** nelle posizioni q_1+dq_1 e q_1 (area $dA_1=ds_2ds_3$):

$$= \frac{\partial}{\partial q_1}(F_1h_2h_3)\frac{ds_1ds_2ds_3}{h_1h_2h_3} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1h_2h_3)dV$$

Coordinate curvilinee ortogonali: divergenza

Teorema della divergenza

divergenza di un campo = flusso per unita` di volume

Flusso = somma dei contributi al attraverso le facce perpendicolari agli assi 1, 2 e 3

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2)\right]$$

Coordinate curvilinee ortogonali: rotore

Calcolo della circuitazione su un circuito infinitesimo

piano 12

$$(F_1 ds_1)_{q_2} + (F_2 ds_2)_{q_1+dq_1} - (F_1 ds_1)_{q_2+dq_2} - (F_2 ds_2)_{q_1} = -\frac{\partial}{\partial q_2}(F_1 ds_1) dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_1}(F_2 ds_2) dq_1 =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1 h_1)\right] dq_1 dq_2$$

Teorema di Stokes: = flusso del rotore attraverso la superficie

Terza componente del rotore moltiplicata per l'elemento di area $ds_1 ds_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$

Coordinate curvilinee ortogonali: rotore

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1 h_1)\right] dq_1 dq_2 = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_3 \, ds_1 ds_2 = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_3 \, h_1 h_2 dq_1 dq_2$$

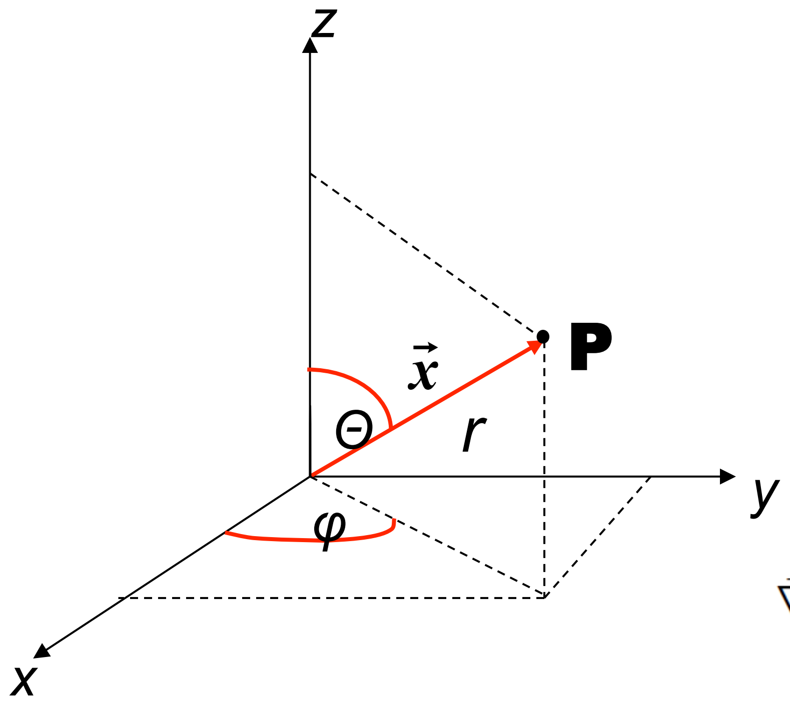
$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1 h_1)\right]$$

(le altre componenti da scambio ciclico delle coordinate)

Coordinate curvilinee ortogonali: Laplaciano

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right]$$

Coordinate sferiche



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta\ , \end{cases}$$

$$h_r = 1$$
$$h_\theta = r$$
$$h_\phi = r\sin\theta$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

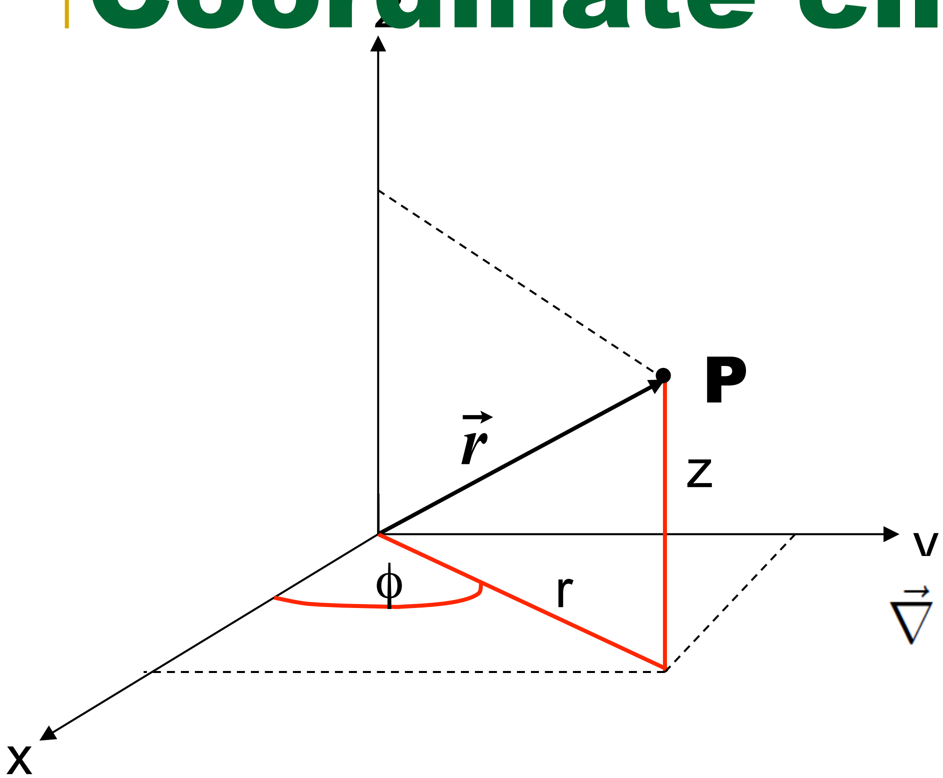
$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\varphi r\sin\theta d\varphi$$

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}\times\vec{F})_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\ , \\ (\vec{\nabla}\times\vec{F})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\ , \\ (\vec{\nabla}\times\vec{F})_\phi &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\ .\end{aligned}$$

Coordinate cilindriche



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi & h_r = 1 \\ y = r\cos\varphi & h_\varphi = r \\ z = z & h_z = 1 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi + \vec{e}_z dz$$

$$dV = r dr d\varphi dz$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_r = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right),$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_\phi = \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right),$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right)$$