
Richiami di analisi vettoriale

- Gradiente, divergenza, rotore
- Teoremi della divergenza e di Stokes
- Relazioni campi-sorgenti

Derivate parziali - Gradiente

$$\vec{x} = (x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\vec{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x} = (\partial_i f) dx_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f$$

Esercizio

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}f(g(\vec{x})) = f'(g(\vec{x})) \vec{\nabla}g(\vec{x})$$

Esempi

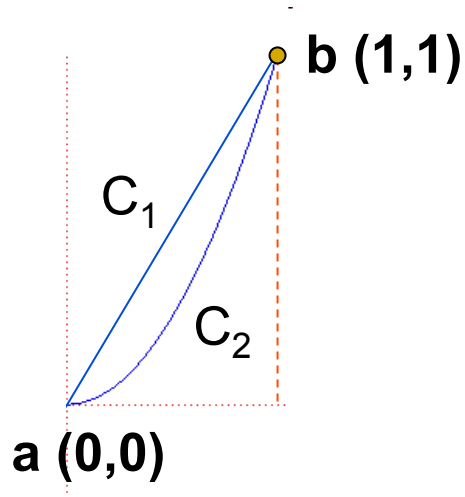
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{\nabla} r = -\vec{e}_r \frac{1}{r^2}$$

Esempio

$$\vec{F}(x, y) = \sqrt{y}\vec{e}_x + (x^3 + y)\vec{e}_y$$



$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}[\vec{x}(t)] \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt$$

$$C_1 \Rightarrow \vec{x}(t) = t\vec{e}_x + t\vec{e}_y \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 \Rightarrow \vec{x}(t) = t\vec{e}_x + t^2\vec{e}_y$$

L' integrale curvilineo da $(0,0)$ a $(1,1)$ lungo le due curve da' risultati diversi.

Sviluppo in serie di Taylor

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) a_i a_j + \dots$$

Esempio

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \approx \frac{1}{r} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} - \vec{a} \cdot \left(-\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

Superficie e curve di livello

$$f(\vec{x}) = C$$

su una superficie di livello

$$0 = df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x} \Rightarrow \vec{\nabla} f = \vec{n} |\vec{\nabla} f|$$

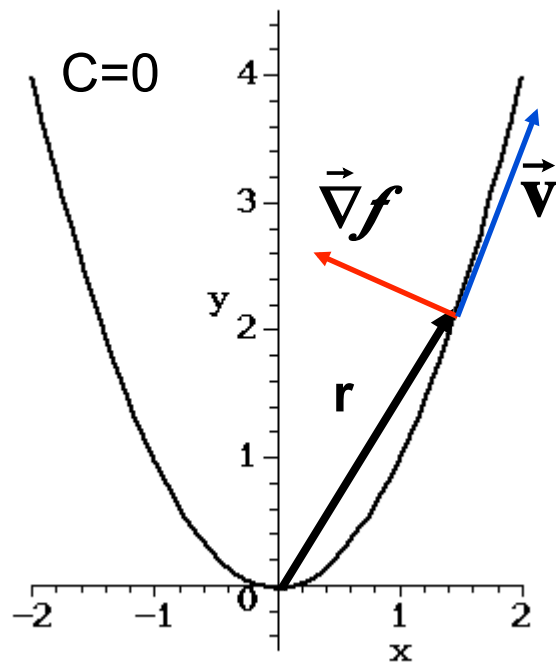
$$\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{n} \cdot \vec{n} |\vec{\nabla} f| = |\vec{\nabla} f|$$

Esempio

$$f(x, y) = y - x^2$$

$$f(x, y) = C$$

Sulla curva di livello $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$



$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_x + t^2\vec{e}_y$$

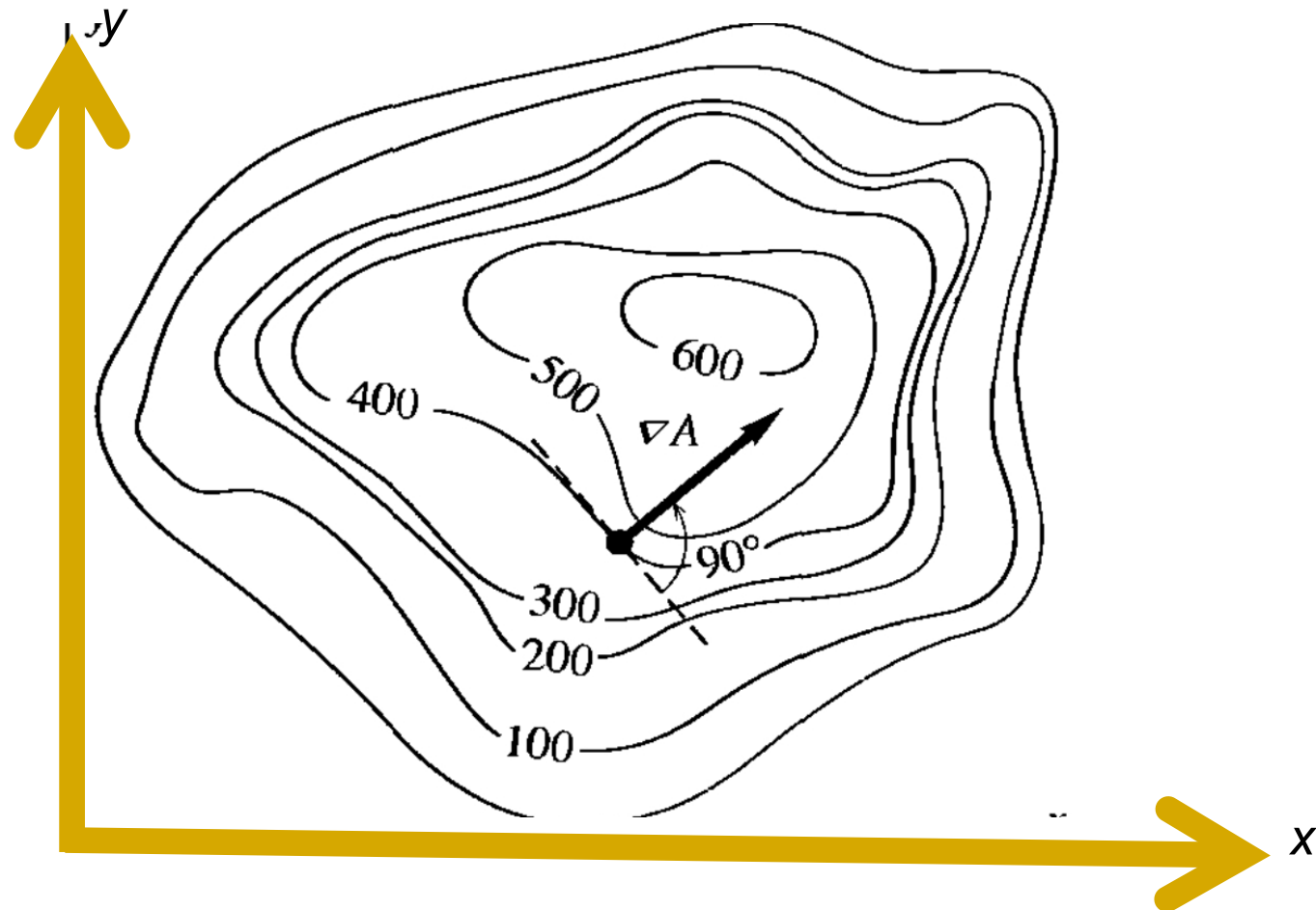
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x + 2t\vec{e}_y \quad \text{tangente}$$

$$\vec{\nabla}f = -2x\vec{e}_x + \vec{e}_y = -2t\vec{e}_x + \vec{e}_y$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}f = -2t + 2t = 0$$

Gradiente

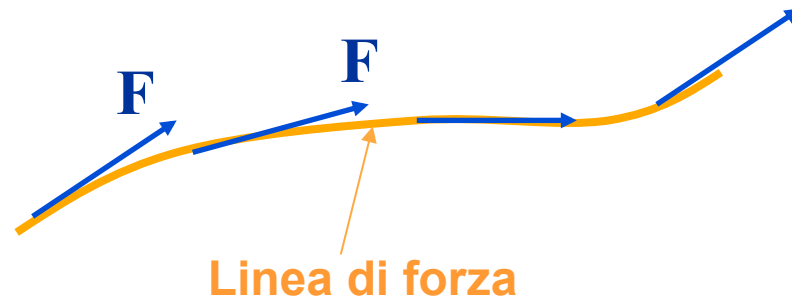
- Le sue componenti sono le variazioni della funzione nella direzione degli assi coordinati
- Il suo modulo e` il tasso di massima variazione con la distanza $df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}f| dr \cos\theta \Rightarrow df \text{ max. per } \cos\theta = 1$
- La sua direzione e` quella del tasso di massima variazione con la distanza
- E` orientato verso i valori piu` grandi della funzione
- Il gradiente in un punto e` perpendicolare alla curva di livello passante per quel punto



Curve di livello - Gradiente

“A” indica l’altezza di una collina in metri. Il **GRADIENTE di A** rappresenta la pendenza nel punto considerato e punta verso la direzione di massimo aumento.

Linee di forza



■ Campo vettoriale

$$\vec{F}(\vec{x}) = F_x(x, y, z)\vec{e}_x + F_y(x, y, z)\vec{e}_y + F_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

□ Linee di forza

□ tangenti in ogni punto al campo

□ verso di percorrenza = verso del campo

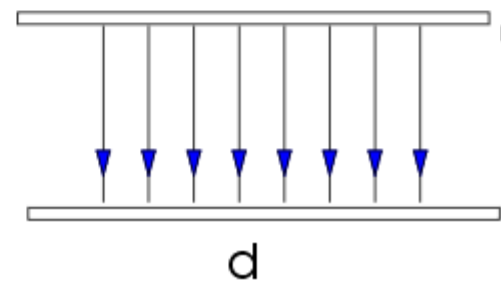
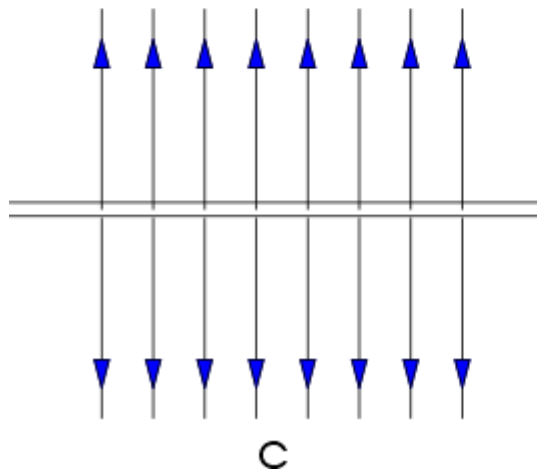
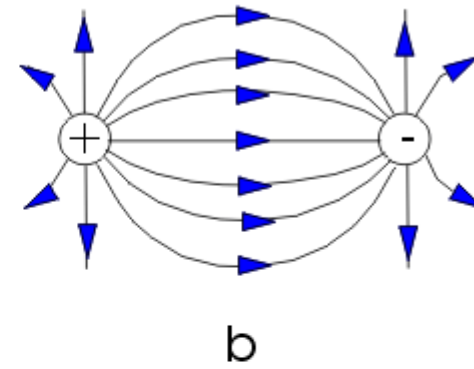
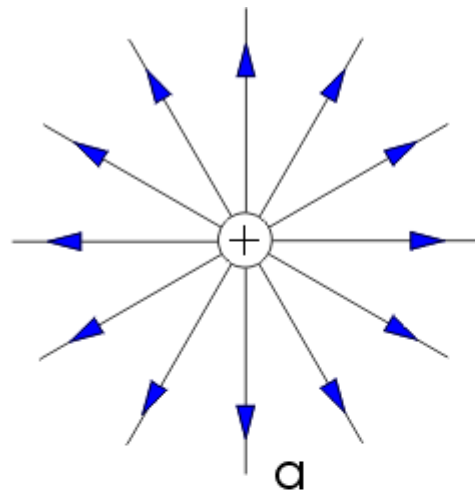
- tratto infinitesimo $d\vec{x}$ nel punto \vec{x} parallelo a $\vec{F}(\vec{x})$

- linee di forza non si incrociano mai

- piu` dense dove il campo e` piu` intenso

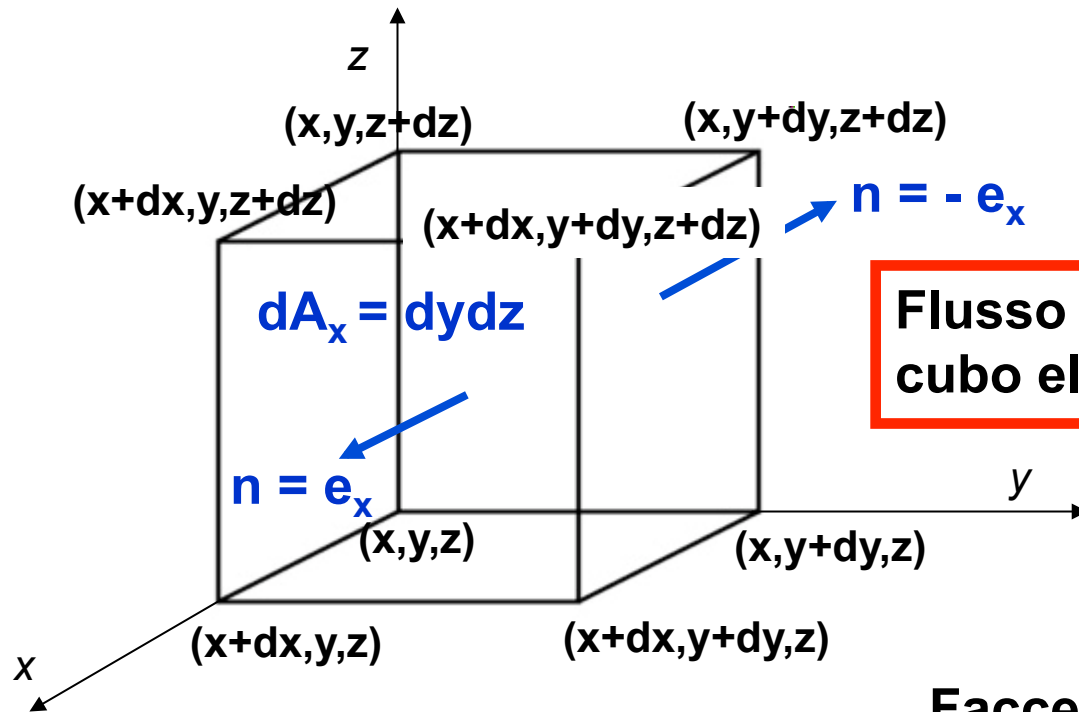
$$d\vec{x} = \hat{A} \vec{F}$$

Linee di forza



Divergenza

Cubo elementare di lati dx , dy , dz $dV=dx dy dz$



Flusso di un campo F attraverso il cubo elementare

Facce "x"

$$\vec{F}(x + dx, y, z) \cdot \vec{e}_x dA_x - \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{e}_x dA_x = (F_x(x + dx, y, z) - F_x(x, y, z)) dy dz$$

$$\vec{n} = \vec{e}_x \qquad \vec{n} = -\vec{e}_x \qquad = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz .$$

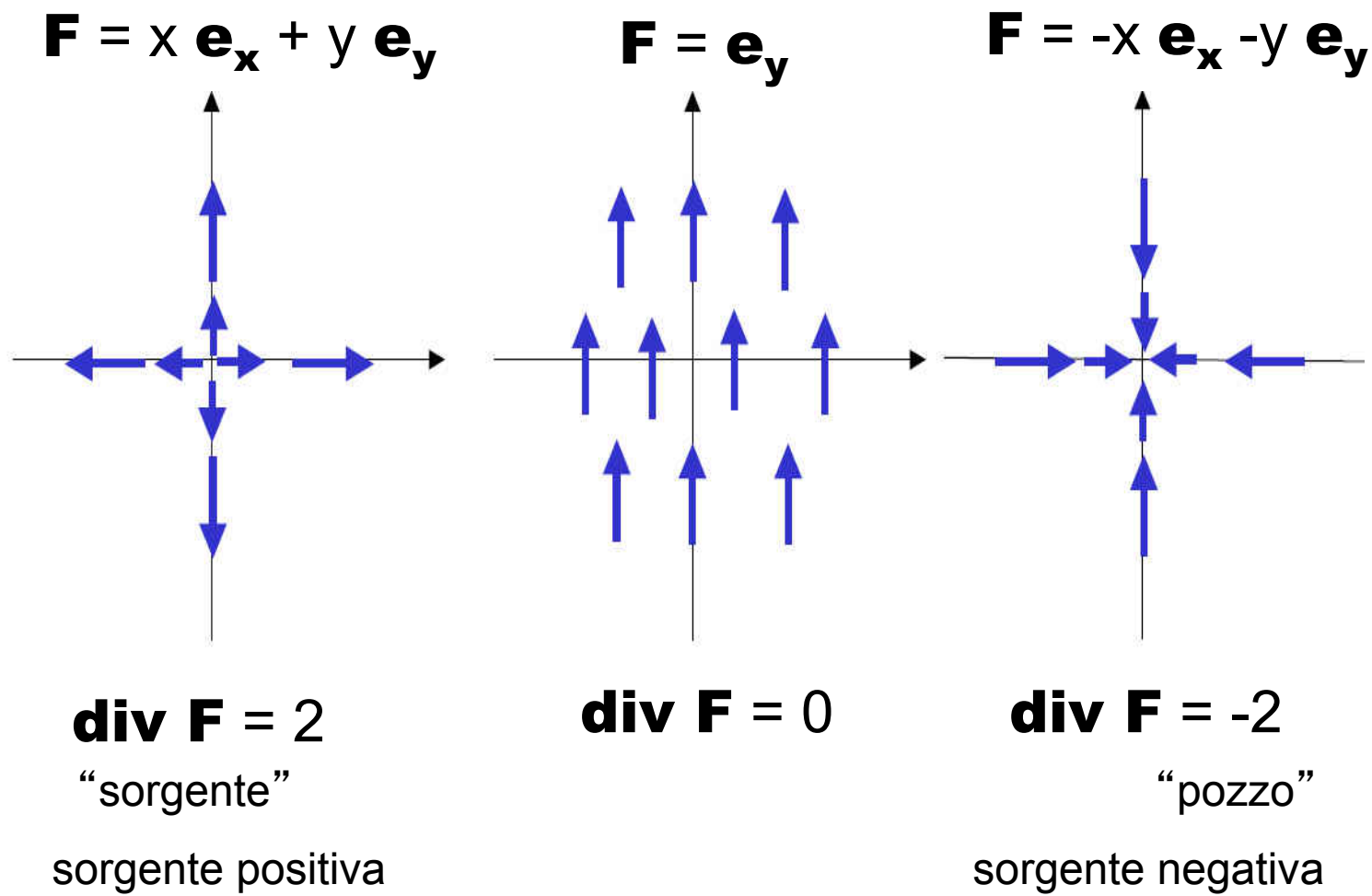
Divergenza

$$\begin{aligned}d\Phi &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV\end{aligned}$$

divergenza di \mathbf{F}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \Rightarrow \frac{d\Phi}{dV} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

divergenza = flusso per unita` di volume



Teorema della divergenza

- Un volume arbitrario puo` essere diviso in volumetti infinitesimi
- I contributi sulle facce comuni di volumetti adiacenti si annullano (normali opposte)
- Resta solo il contributo delle facce esterne = superficie che racchiude il volume

$$\Phi_{\Sigma_V}(\vec{F}) = \oint_{\Sigma_V} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

Circuitazione

- Campo conservativo

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

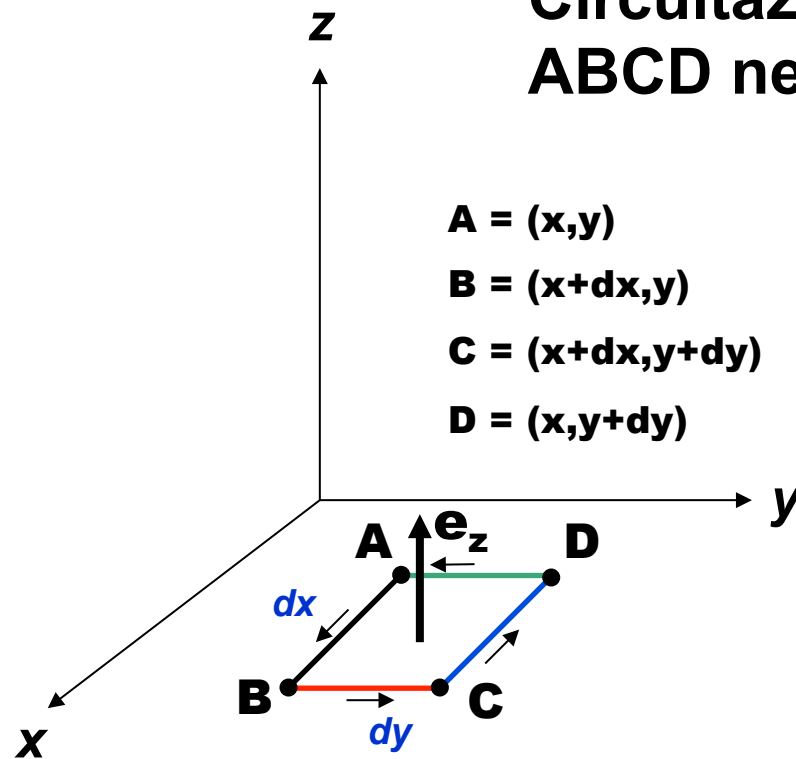
- Forza conservativa

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \Phi$$

- **Forma locale** → **teorema di Stokes**
-

Rotore

Circuitazione lungo il circuito elementare ABCD nel piano xy



$$d\mathbf{A}_z = dx dy \mathbf{n} = dx dy \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} d\Gamma_z &= F_x(x, y)dx + F_y(x + dx, y)dy - F_x(x + dx, y + dy)dx - F_y(x, y + dy)dy \\ &\approx F_x(x, y)dx + F_y(x + dx, y)dy - F_x(x, y + dy)dx - F_y(x, y)dy \end{aligned}$$

Rotore

$$d\Gamma_z \approx F_x(x, y)dx + F_y(x + dx, y)dy - F_x(x, y + dy)dx - F_y(x, y)dy$$

$$= [F_x(x, y) - F_x(x, y + dy)]dx + [F_y(x + dx, y) - F_y(x, y)]dy$$

$$\approx [\cancel{F_x(x, y)} - \cancel{F_x(x, y)} - \frac{\partial F_x}{\partial y} dy]dx + [\cancel{F_y(x, y)} + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx - \cancel{F_y(x, y)}]dy$$

$$= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA_z$$

$$\equiv \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right)_z dA_z = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_z dA = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA$$

Rotore

$$d\Gamma_x = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_x dA_x$$

$$d\Gamma_y = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y dA_y$$

$$d\Gamma_z = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z dA_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} =$$

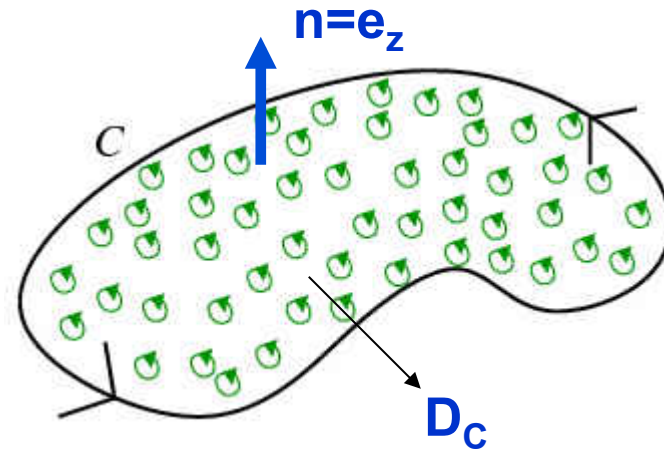
$$= (\partial_y F_z - \partial_z F_y) \vec{e}_x + (\partial_z F_x - \partial_x F_z) \vec{e}_y + (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \vec{e}_z$$

■ In componenti: $(\vec{\nabla} \times \vec{F})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$

■ Esercizio: $\vec{\nabla} \times (h\vec{F}) = \vec{\nabla} h \times \vec{F} + h\vec{\nabla} \times \vec{F}$

Teorema di Green (2 dim.)

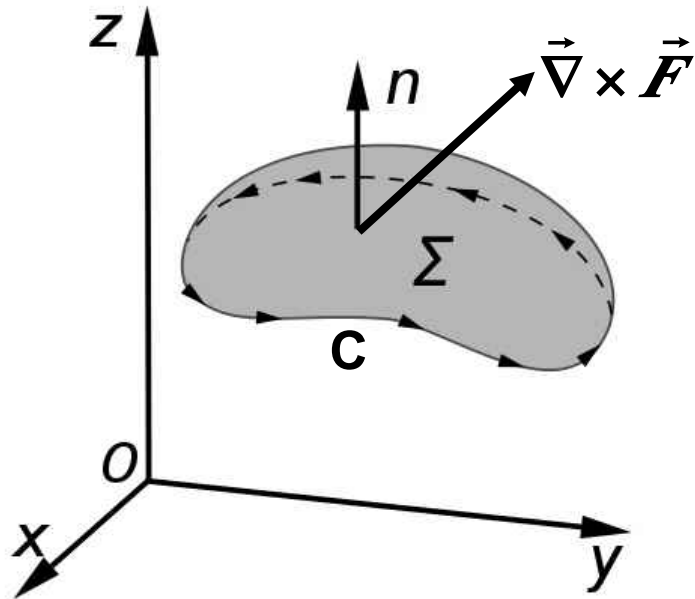
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{D_C} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy$$
$$= \int_{D_C} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_z dA$$



- Una superficie piana puo` essere approssimata col grado di accuratezza desiderato da una griglia di “rettangolini” elementari
- I contributi dei lati adiacenti si annullano e resta solo il contributo del contorno che racchiude la superficie (teorema di Green)

Teorema di Stokes

Generalizzazione allo spazio 3-dim del teorema di Green



somma sulle proiezioni

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dA_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) dA_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA_z$$

$$\vec{n}dA = n_x dA \vec{e}_x + n_y dA \vec{e}_y + n_z dA \vec{e}_z = dA_x \vec{e}_x + dA_y \vec{e}_y + dA_z \vec{e}_z$$

$$d\Gamma = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}dA$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA$$

Campo conservativo

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = 0 \quad \forall C \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Espressione integrale $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} \Phi$

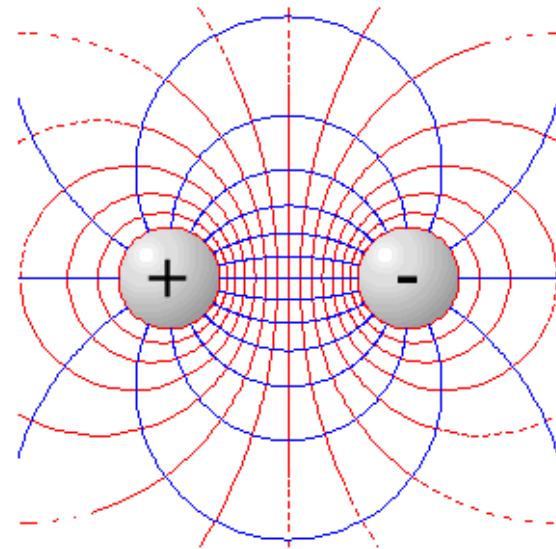
Espressione differenziale $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

Esercizio: dimostrare che il rotore di un gradiente è nullo.

Superficie equipotenziale

- Rappresentazione alternativa alle linee di campo per i campi conservativi
- Linee di campo ortogonali alle superficie equipotenziale

Linee di forza verso zone a potenziale minore

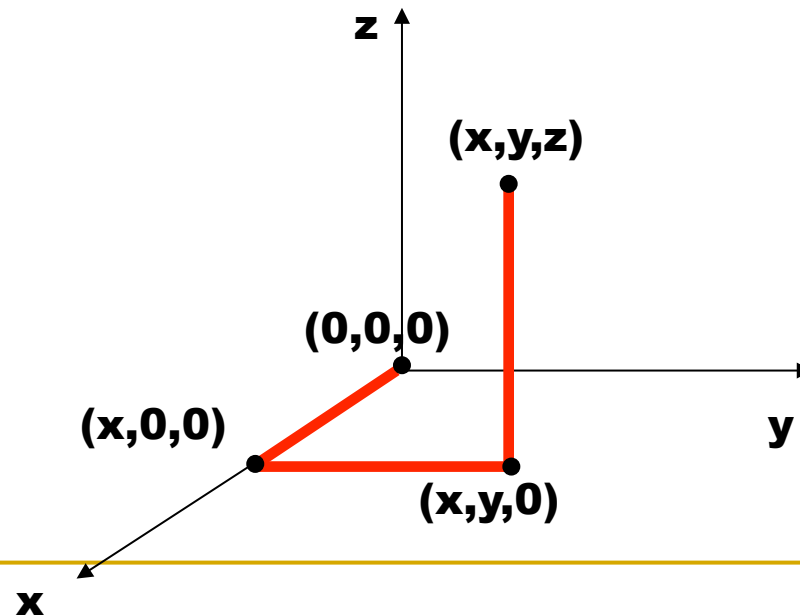


Esempio

$$\vec{F}(x, y, z) = -(2x - y)\vec{e}_x - (2y - x)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\vec{e}_x + (\partial_z F_x - \partial_x F_z)\vec{e}_y + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\vec{e}_z \\ &= (0 - 0)\vec{e}_x + (0 - 0)\vec{e}_y + (1 - 1)\vec{e}_z \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi = -\int \vec{F} \cdot d\vec{l} &= -\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} dx F_x - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} dy F_y - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz F_z \\ &= x^2 + y^2 - xy - \frac{z^2}{2}.\end{aligned}$$



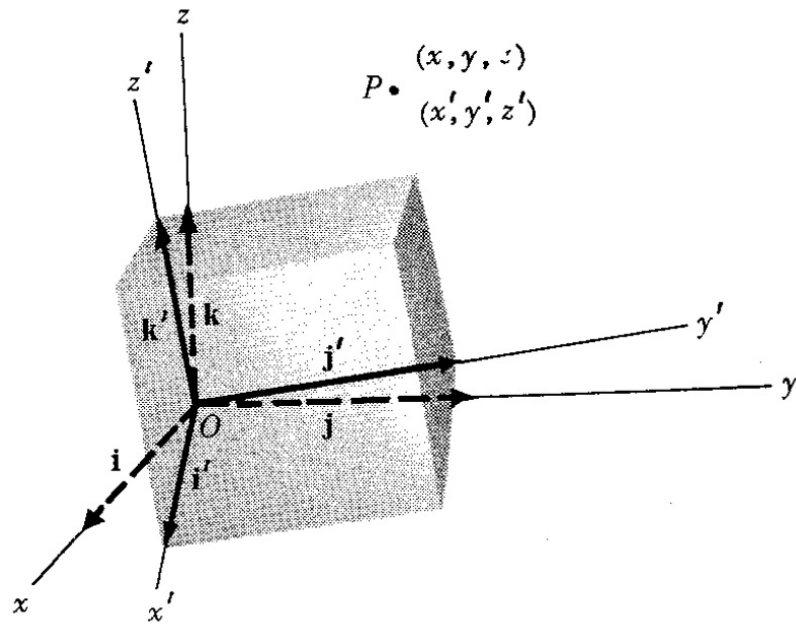
Laplaciano

$$\Delta\Phi \equiv \nabla^2\Phi \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)$$

$$\Delta = \nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Invarianti



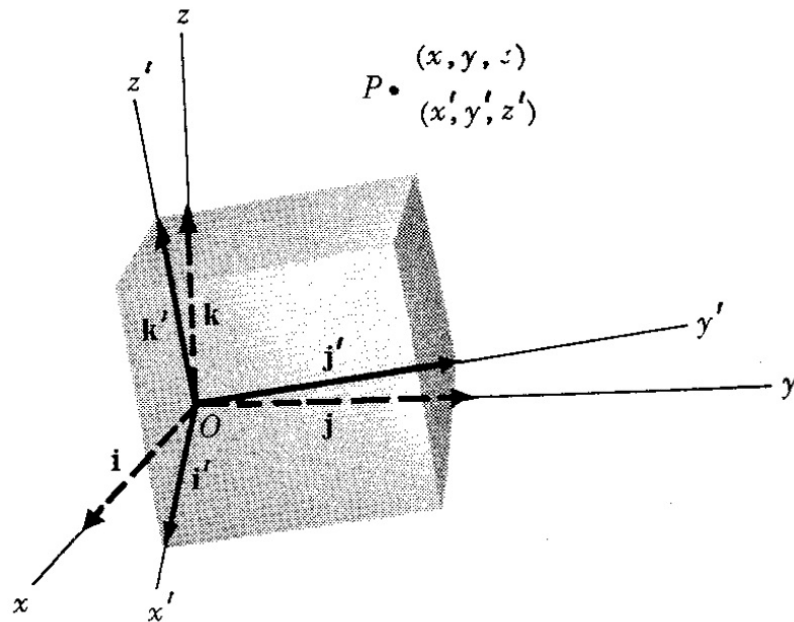
$$\vec{r}_P = x_i \vec{e}_i = x'_j \vec{e}'_j$$

$$x'_k = x_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_k \equiv R_{ki} x_i$$

$$R_{ki} \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_k \quad \text{Matrice di rotazione}$$

$$R^T \equiv R^{-1} \quad \det R = \pm 1$$

Invarianti



Una funzione che dipende solo dal punto (es. la temperatura) e' **INVARIANTE** rispetto alla trasformazione considerata (rotazione)

Una funzione invariante si dice uno **SCALARE**

$$\Phi'(x', y', z') = \Phi(x, y, z)$$

Esempio: il prodotto scalare e' invariante per rotazioni

$$\begin{aligned} x'_i y'_i &= R_{ik} x_k R_{ij} y_j = R_{ik} R_{ij} x_k y_j = R_{ki}^T R_{ij} x_k y_j = (R^{-1})_{ki} R_{ij} x_k y_j \\ &= \delta_{kj} x_k y_j = x_j y_j \end{aligned}$$

Relazioni campo-sorgenti

- Un campo vettoriale nello spazio 3-dim e' determinato univocamente se sono dati il suo rotore e la sua divergenza (se si annullano abbastanza velocemente all' infinito)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= S(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \vec{C}(\vec{x})\end{aligned}$$

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

si puo' sempre scrivere in questo modo

Relazioni campo-sorgenti

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

equazione di continuita`

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

forza di Lorentz