Sommario

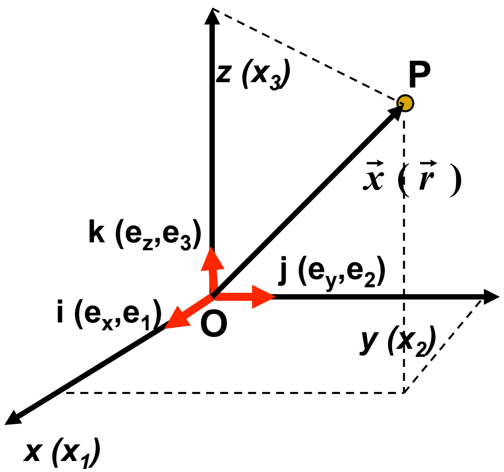
- Sistemi di riferimento
- Operazioni sui vettori
- Concetto di campo
- Angolo solido
- Flusso di un campo vettoriale

Entita` fisiche

- Grandezze fisiche
  - scalari (es. temperatura, energia, ecc.)
  - vettoriali (es. posizione, velocita`, forza, ecc.)
  - tensoriali

Sistemi di riferimento

- Descrizione di un sistema fisico
  - sistema di riferimento
  - orologio



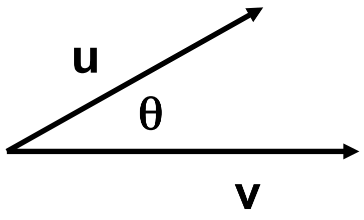
$$\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = (x, y, z)$$

$$\vec{e}_x = (1,0,0)$$
$$\vec{e}_y = (0,1,0)$$
$$\vec{e}_z = (0,0,1)$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i \equiv x_i \vec{e}_i$$ (somma sugli indici ripetuti)

$$|\vec{x}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ (modulo)

Prodotto scalare



$$\vec{v}\cdot\vec{u} \equiv |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$$

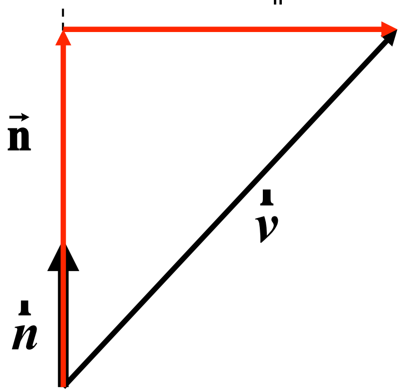
$$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \Rightarrow (u_i\vec{e}_i)\cdot(v_j\vec{e}_j) = u_i v_j \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = u_i v_j d_{ij} = u_i v_i$$

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

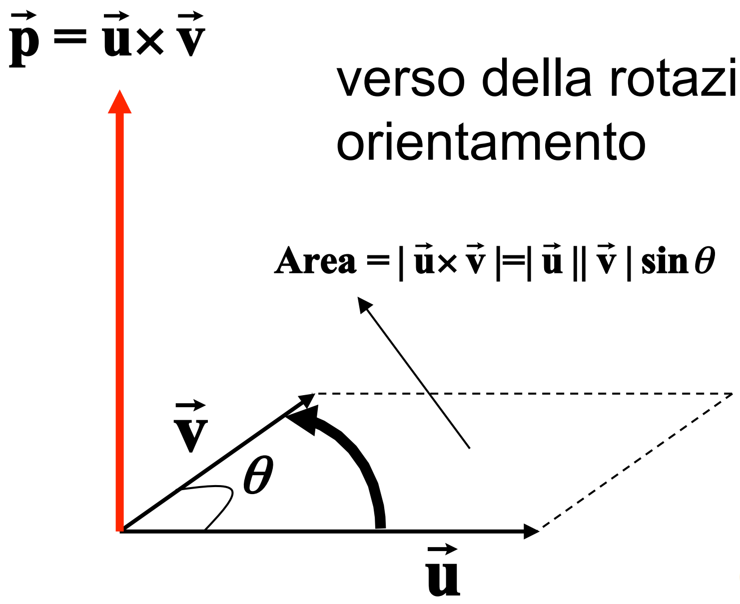
$$\vec{\mathbf{v}}_\perp = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_\parallel$$

$$\vec{\mathbf{v}}_\parallel = (\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{n}})\,\vec{\mathbf{n}}$$



Prodotto vettoriale

verso della rotazione
orientamento



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\boxed{\vec{e_i} \times \vec{e_j} = \epsilon_{ijk} \vec{e_k}}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se ijk è una permutazione pari di 123 ,} \\ -1 & \text{se ijk è una permutazione dispari di 123 ,} \\ 0 & \text{se due qualsiasi indici sono uguali .} \end{cases}$$

totalmente antisimmetrico

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

Ginnastica con gli indici

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_i b_j \overset{\varepsilon_{ijr}\vec{e}_r}{\vec{e}_i\times\vec{e}_j} = a_i b_j \varepsilon_{ijr}\vec{e}_r \Rightarrow \boxed{(\vec{a}\times\vec{b})_r = \varepsilon_{rij} a_i b_j}$$

$$\underbrace{\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}}_{\text{contrazione}} = \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Esempio $\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}$

$$\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right]_i = \varepsilon_{ijk} a_j \overset{\boxed{\varepsilon_{knm} b_n c_m}}{(\vec{b}\times\vec{c})_k} = \overset{\boxed{\varepsilon_{kij}}}{\varepsilon_{ijk}} a_j \; \varepsilon_{knm} b_n c_m$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{kij}\varepsilon_{knm}}_{} a_j b_n c_m = (\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}) a_j b_n c_m = b_i \underbrace{(a_m c_m)}_{\vec{a}\cdot\vec{c}} - c_i \underbrace{(a_n b_n)}_{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Ginnastica con gli indici

Si possono ritrovare quasi tutte le identita` vettoriali

Nota: $$T_{jk} = T_{kj} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

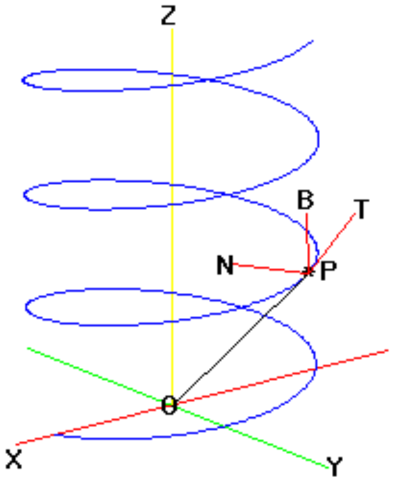
in particolare: $$\varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$$

Esercizio. Dimostrare che:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ non cambia per scambio ciclico

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = |\vec{a}|^2 (\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

Curva nello spazio e integrale di linea



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v} \qquad \vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|} \qquad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

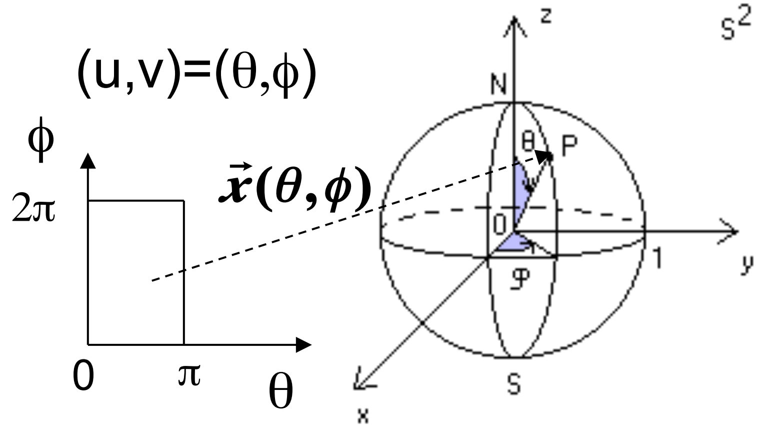
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}[\vec{x}(t)] \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}\, dt$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds}\mathrm{v} \Rightarrow \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{T}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}[\vec{x}(s)] \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}\, ds = \int_a^b \vec{F}[\vec{x}(s)] \cdot \vec{T}\, ds$$

Superficie nello spazio

$$\vec{x} = \vec{x}(u,v)$$



$$\vec{n}\, dA \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\, dudv$$

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| dudv$$

Integrale di superficie

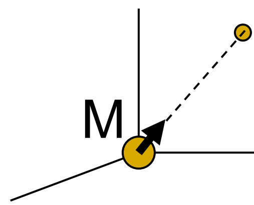
$$\int_\Sigma dA = \int_\Omega \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| dudv$$

$$\int_\Sigma f\, dA = \int_\Omega f\left[\vec{r}(u,v)\right] \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| dudv$$

Concetto di campo

- Esempio: interazione gravitazionale

$$\boxed{\vec{F} = G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r}$$



$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = m\,(G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{e}_r) \equiv m\,\vec{\mathcal{G}}(\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) \equiv G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{e}_r}$$

campo gravitazionale
=
campo vettoriale

$$\vec{\mathcal{G}} = \lim_{m\to 0}\frac{\vec{F}}{m}$$

m **"sonda"** il campo generato da M; m **"interagisce"** con il campo generato da M

Concetto di campo

- Descrizione di una quantita` fisica in termini del campo:

equazioni che governano l'evoluzione del campo nel tempo per ogni punto dello spazio (connessione con le sorgenti del campo) – la soluzione fornisce in linea di principio

$$\vec{G}(\vec{x},t)$$

$$\vec{F} = m\vec{G}(\vec{x},t)$$

Concetto di campo

- Interazione **nella fisica pre-relativistica**

  - azione a distanza
  - interazione con un campo

descrizioni equivalenti

velocita` infinita di propagazione delle interazioni

Concetto di campo

- Equazioni per i campi elettromagnetici (vedremo poi cosa sono, pensiamo ai fenomeni ottici ad esempio): contengono una **costante**

$$\boxed{c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

(velocita` della luce nel vuoto)

- La fisica dei fenomeni elettromagnetici non e` descritta in modo equivalente in sistemi di riferimento inerziali se questi sono collegati dalle trasformazioni classiche di Galilei

Campo come entita` fisica

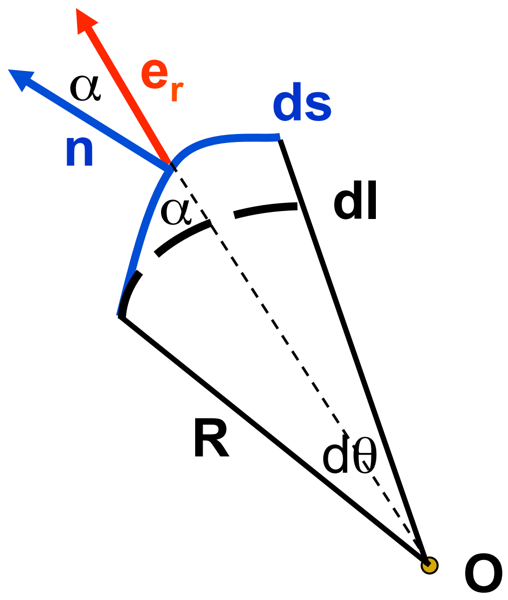
- Velocita` finita di propagazione delle interazioni (relativita` ristretta)
- Interazione tra sorgenti e campo
- Il campo, che trasporta energia, quantita` di moto, momento angolare diviene una entita` fisica

Nuova definizione di "metro"

- 1983 – XVII Conferenza Generale di Pesi e Misure

1 m = distanza percorsa dalla luce in un 1/299 792 458 di secondo

Angolo piano e angolo solido



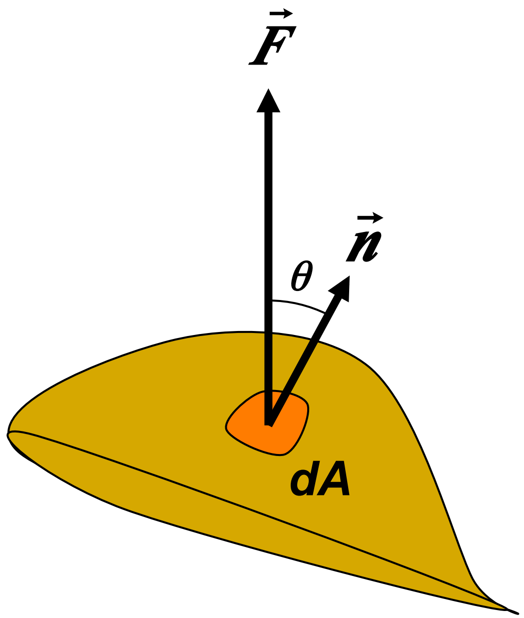
$$d\theta = \frac{dl}{R} = \frac{ds\cos\alpha}{R} = \frac{ds\vec{n}\cdot\vec{e}_r}{R}$$

(radianti)

$$\boxed{d\Omega = \frac{dA\cos\alpha}{R^2} = \frac{dA\vec{n}\cdot\vec{e}_r}{R^2}}$$

(steradianti)

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie



$$\boxed{\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \int_\Sigma d\Phi(\vec{F}) = \int_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA}$$

$$\boxed{d\Phi(\vec{F}) \equiv \vec{F}\cdot\vec{n}\; dA}$$

superficie chiusa

$$\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \oint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA$$