Onde elettromagnetiche

- Equazione delle onde per i campi
- Corda vibrante
- Onde piane
- Polarizzazione
- Energia e quantita` di moto - vettore di Poynting
- Velocita` di fase e di gruppo

Equazione delle onde per i campi

- In assenza di cariche e correnti

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)}_{=0}-\Delta\vec{E} \qquad =-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} \quad =-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Equazione delle onde per i campi

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

- Esattamente allo stesso modo

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

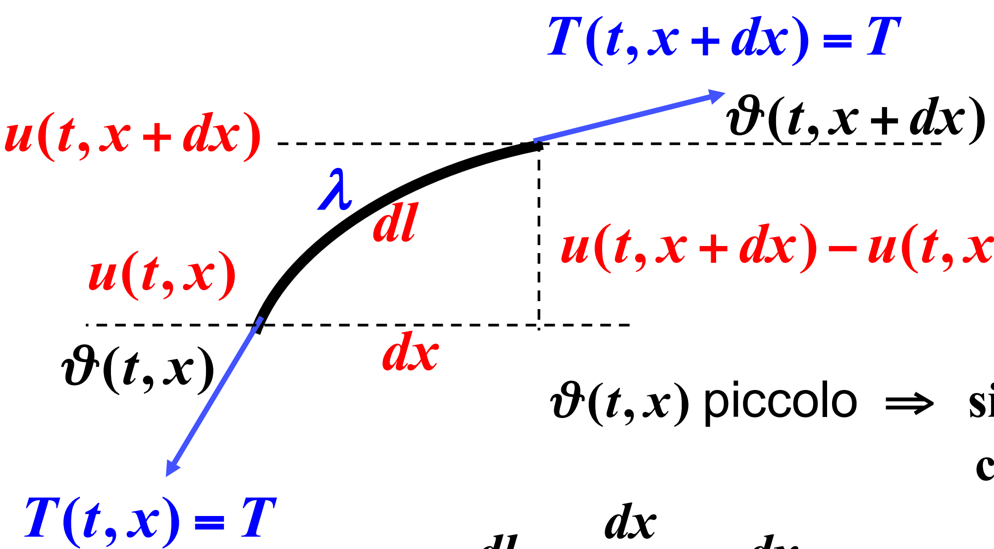
Equazione delle onde per i campi

- L'equazione dell'onda e` relativisticamente invariante
- Si introduce l'operatore differenziale d'Alambertiano

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

nel vuoto $\Box \vec{E} = 0 \qquad \Box \vec{B} = 0$

Corda vibrante



$$u(t,x+dx)-u(t,x)=\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$\vartheta(t,x)$ piccolo $\Rightarrow$ $\sin\vartheta(t,x)\approx\tan\vartheta(t,x)\approx\vartheta(t,x)$
$\cos\vartheta(t,x)\approx 1$

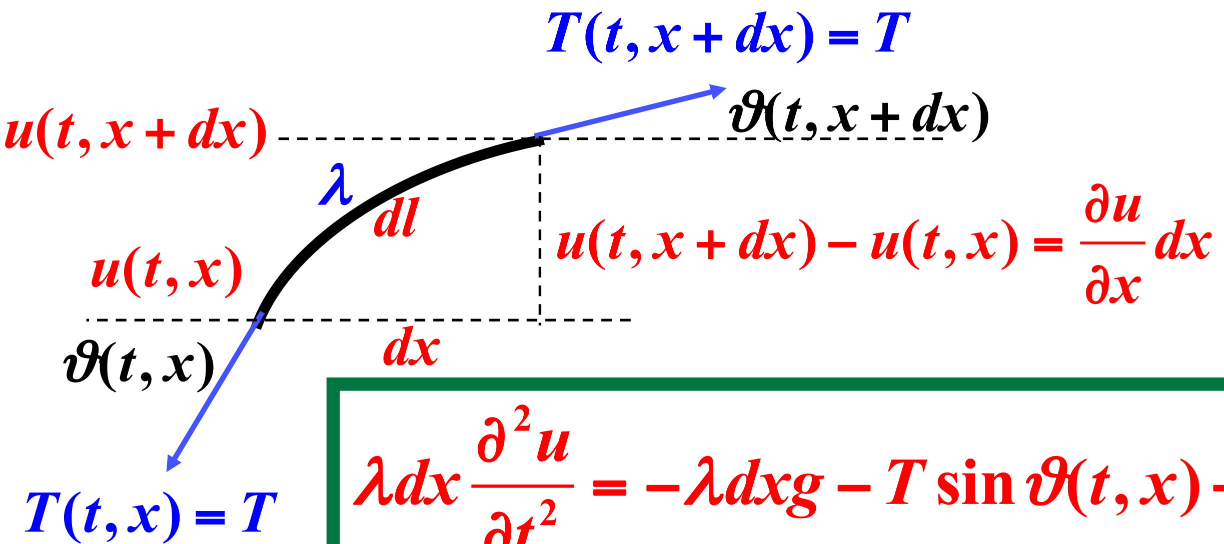
$$dl=\frac{dx}{\cos\vartheta}\approx dx$$

$$\tan\vartheta(t,x)=\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\approx\vartheta(t,x)}$$

$$ma_{\text{verticale}}=\Sigma F_{\text{verticale}}$$

$$\lambda dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\lambda dxg-T\sin\vartheta(t,x)+T\sin\vartheta(t,x+dx)$$

Corda vibrante

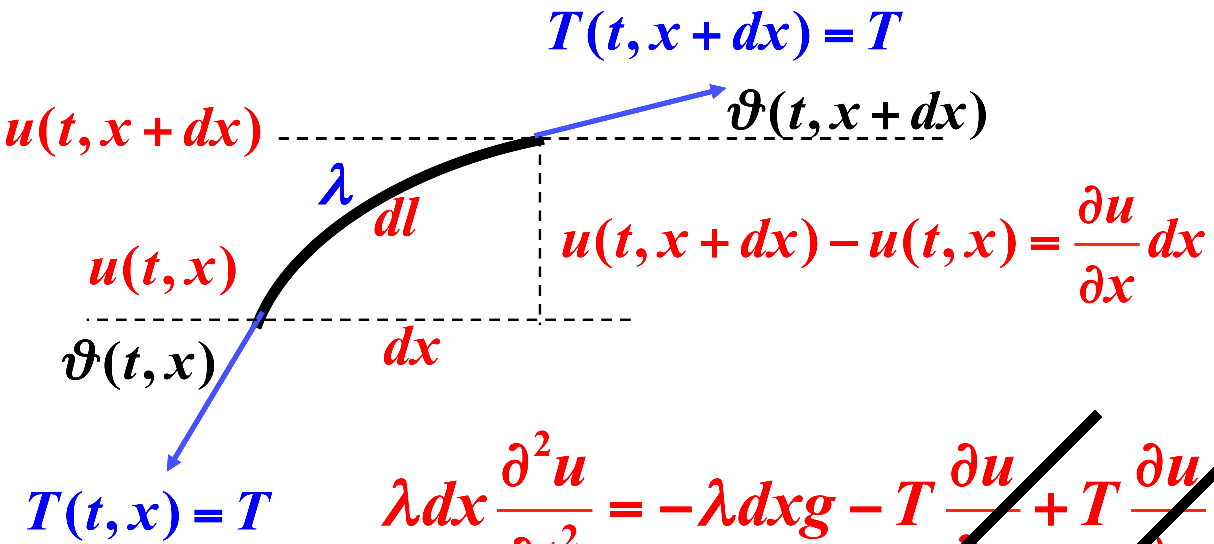


$$\boxed{\lambda dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\lambda dxg-T\sin\vartheta(t,x)+T\sin\vartheta(t,x+dx)}$$

$$\sin\vartheta(t,x+dx)=\sin\vartheta(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}\big(\sin\vartheta(t,x)\big)dx=\sin\vartheta(t,x)+\cos\vartheta(t,x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx$$

$$\approx\vartheta(t,x)+\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx\quad\approx\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Corda vibrante



$$\lambda dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\lambda dxg-\cancel{T\frac{\partial u}{\partial x}}+\cancel{T\frac{\partial u}{\partial x}}+T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\lambda g}{T}}$$

Equazione delle onde (d' Alembert)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$f(t,x) = f_1(x - \mathrm{v}\,t) + f_2(x + \mathrm{v}\,t)$$

quantita` che si propaga lungo l' asse x positivo con velocita` v

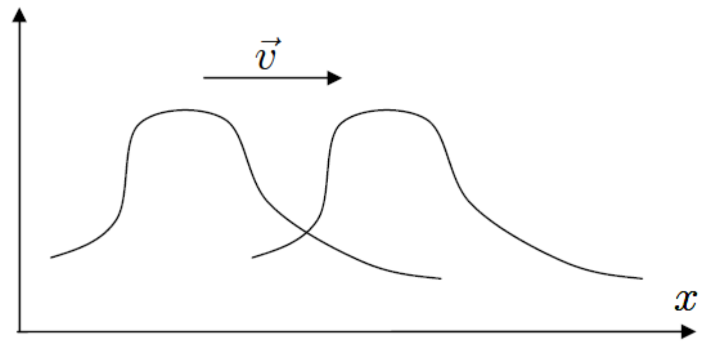
onda progressiva

quantita` che si propaga lungo l' asse x negativo con velocita` v

onda regressiva

Onde $\quad f(x - \mathrm{v}t)$

- Fissiamo il punto di osservazione $x=x_0$
- Al variare del tempo si rileva $g(t)=f(x_0-vt)$
- Se dall' istante $t=t_0$ iniziamo a muoverci verso le x positive con velocita` v



$$x(t) = x_0 + \mathrm{v}(t - t_0)$$

$$g(t) = f\left(x(t) - \mathrm{v}t\right)$$

$$= f\left(x_0 + \mathrm{v}(t - t_0) - \mathrm{v}t\right)$$

$$= f(x_0 - \mathrm{v}t_0)$$

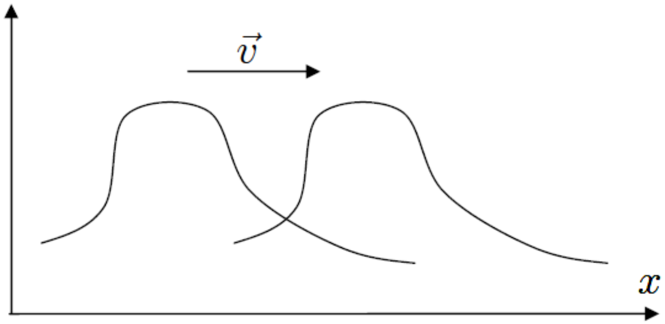
$$= g(t_0)$$

Si osserva il valore della funzione d' onda nel punto x_0 all' istante t_0

Il profilo dell' onda trasla nella direzione x positiva con velocita` v

Onde

$$f(x \pm \mathrm{v}t)$$



$x \pm \mathrm{v}t$ si chiama **fase** dell'onda

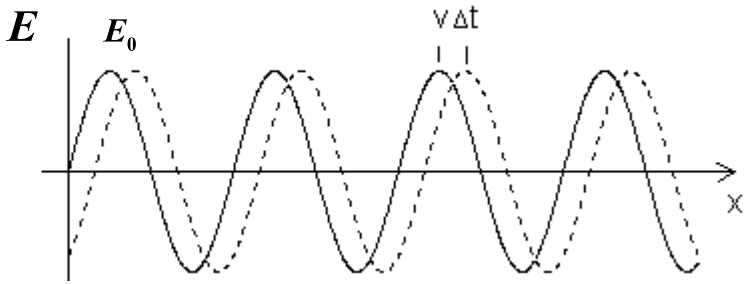
I punti in cui la fase e` costante formano il **fronte d'onda**

Onde piane

- Onda piana: propagazione di un' onda periodica con frequenza definita lungo una direzione

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \qquad (e^{ix} = \cos x + i \sin x)$$

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$



Onda sinusoidale:

- profilo fisso in moto con velocita` v
- fissato t, sinusoide lungo x
- fissato x, sinusoide nel tempo

Onde piane

$$\Phi(t, x) = \omega t - kx$$ fase dell'onda

$$\exp i\Phi(t + \frac{2\pi}{\omega}, x) = \exp i\Phi(t, x)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

periodo

frequenza angolare

$$\exp i\Phi(t, x + \frac{2\pi}{k}) = \exp i\Phi(t, x)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

lunghezza d'onda

numero d'onda

Onde piane

$$\Phi(t,x) = \omega t - kx$$ fase dell' onda

$$d\Phi(t,x) = 0 = \omega dt - kdx$$

$$\omega = k\,\mathrm{v}$$

velocita` di fase

1 lunghezza d' onda su 1 periodo

$$\mathrm{v} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

Onde piane

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0 \, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad\qquad \left|\vec{k}\right|^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0$$

$$\omega = kc$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

il campo elettrico oscilla in un piano ortogonale alla direzione di propagazione

Onde piane

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$$

$$= \frac{\hat{k}}{c} \times \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

anche il campo magnetico e\` ortogonale alla direzione di propagazione

Onde elettromagnetiche

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \qquad\qquad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

il campo elettrico e magnetico oscillano in un piano ortogonale alla direzione di propagazione

$\Downarrow$

le onde elettromagnetiche sono onde **“trasversali”**

Onde piane

- Relazioni

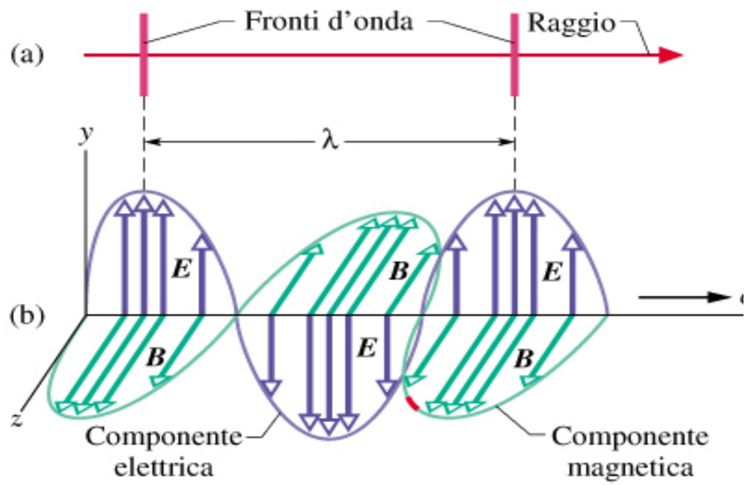
$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}$$

  - *campo elettrico e magnetico sono perpendicolari tra loro e alla direzione di propagazione*
  - ***k, E_0, B_0*** *formano una terna destrorsa*

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\vec{B}_0 \qquad \hat{k}\times\vec{E}_0=c\vec{B}_0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{k}\times\vec{B}_0=-\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_0 \qquad \hat{k}\times\vec{B}_0=-\frac{\vec{E}_0}{c}$$

$$\vec{E}_0\times\vec{B}_0\propto\hat{k} \qquad E_0=cB_0$$



Polarizzazione

- Onda piana propagantesi lungo l'asse x

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cos \omega t \qquad \vec{B} = B_0 \vec{e}_z \cos \omega t}$$

costanti *nel tempo* ➔ *onda* ***polarizzata linearmente***

direzione di polarizzazione = direzione del campo elettrico

$$\vec{E} = E_0 \left(\vec{e}_y \sin(\omega t - kx) + \vec{e}_z \cos(\omega t - kx) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}}{c} = B_0 \left(-\vec{e}_y \cos(\omega t - kx) + \vec{e}_z \sin(\omega t - kx) \right)$$

E,B ruotano nel piano yz con frequenza ω

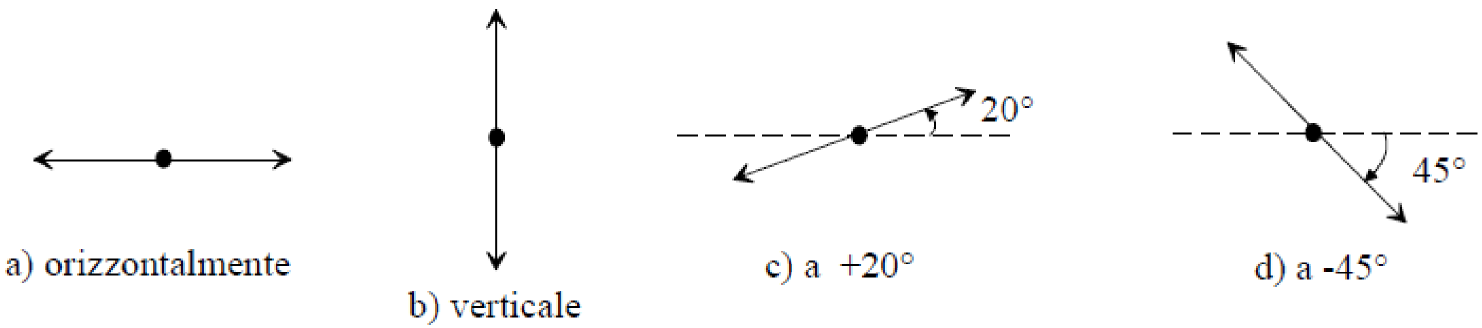
➔ *onda* ***polarizzata circolarmente***

Polarizzazione

- La polarizzazione caratterizza quindi la direzione del campo elettrico associato alla radiazione (perpendicolarmente alla direzione di propagazione)
- La polarizzazione e` definita solo per le onde trasversali
- Polarizzazione circolare/ellittica = combinazione lineare di onde polarizzate lineramente (e viceversa)

Polarizzazione

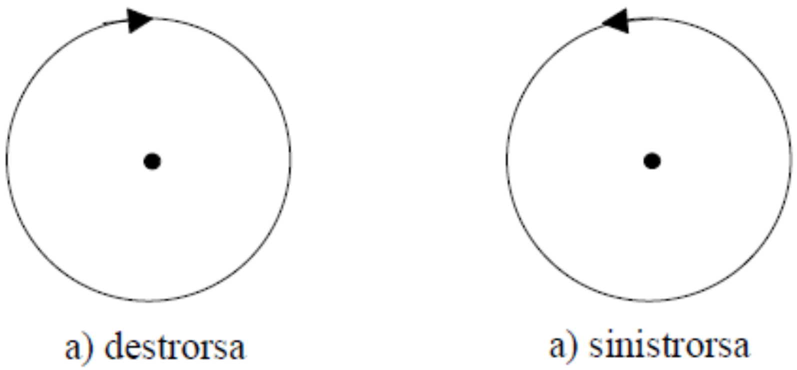
- Polarizzazione lineare



La direzione di propagazione esce dalla pagina

Polarizzazione

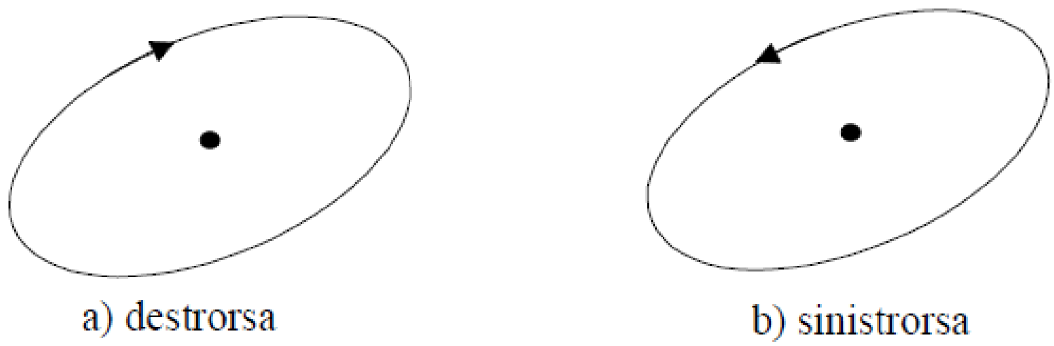
- Polarizzazione circolare



La direzione di propagazione esce dalla pagina

Polarizzazione

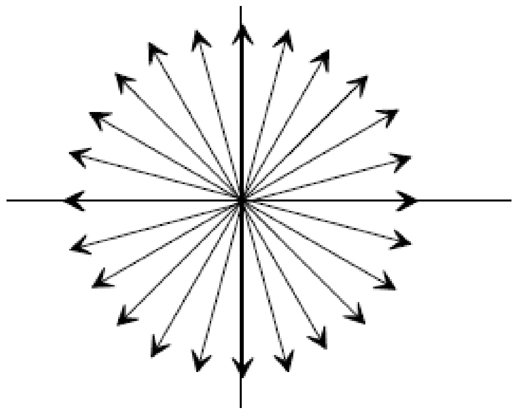
- Polarizzazione ellittica



La direzione di propagazione esce dalla pagina

Polarizzazione

- Onda non polarizzata



La direzione di propagazione esce dalla pagina

Onde sferiche

- Onde emesse da una sorgente puntiforme
- Simmetria centrale: nessuna direzione e` privilegiata
- Una generica componente di un campo dipende solo da r e t: $\psi(r,t)$

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Onde sferiche

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}$$

laplaciano in coordinate sferiche (quando non c'e` dipendenza dagli angoli)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = 0$$

Onde sferiche

$$r\psi(r,t) = f(r - ct)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{f(r - ct)}{r}}$$

La funzione d' onda va come 1/r

Energia di un'onda

- La luce del sole scalda ....

$$U = \int u(t,\vec{r})\,dV = \int \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\right] dV$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \left[\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] dV \quad = \int \left[\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0\varepsilon_0} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.(-\vec{\nabla}\times\vec{E})\right] dV$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\int \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) dV \quad \equiv -\int \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dV$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$$

vettore di Poynting

Energia di un' onda

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

$$[S]L^2 = \frac{\text{Energia}}{T}$$

$$[S] = \frac{J}{s \cdot m^2}$$

Diretto lungo la direzione di avanzamento del campo e.m.

Il flusso attraverso una superficie chiusa fornisce la variazione temporale dell' energia nel volume racchiuso dalla superficie

Energia di un'onda

Se sono presenti cariche elettriche che si muovono sotto l'azione del campo elettrico dando luogo a una densita` di corrente, si deve considerare anche il contributo al bilancio energetico dello scambio di energia tra onde e cariche necessario per tenerle in movimento

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

potenza per unita` di volume

intensita`

$$I = \langle S \rangle$$

$$I = \frac{\overline{\Delta U}}{A \Delta t}$$

energia media per unita` di tempo (potenza) che fluisce per unita` di superficie lungo la direzione di propagazione

onda piana

$$I = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = c\frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

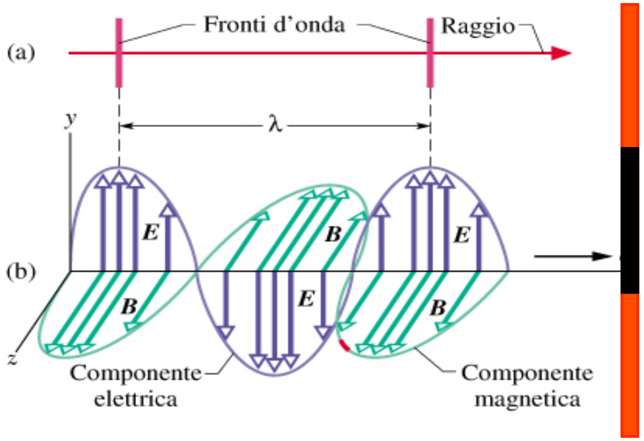
Energia di un' onda - esempio

- Sorgente puntiforme che emette a potenza costante: dU/dt = costante
- Flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie sferica di raggio r coincidente con un fronte d' onda

$$\oint_S \vec{S} \cdot \vec{n}\, dA = \overline{S} 4\pi r^2 = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{dU}{dt} = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 \propto \frac{1}{r}$$

Quantita` di moto



superficie con densita` di carica σ

$d\Sigma$

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \sigma d\Sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

velocita` acquisita dalle cariche sotto l'azione del campo elettrico

potenza assorbita per unita` di superficie

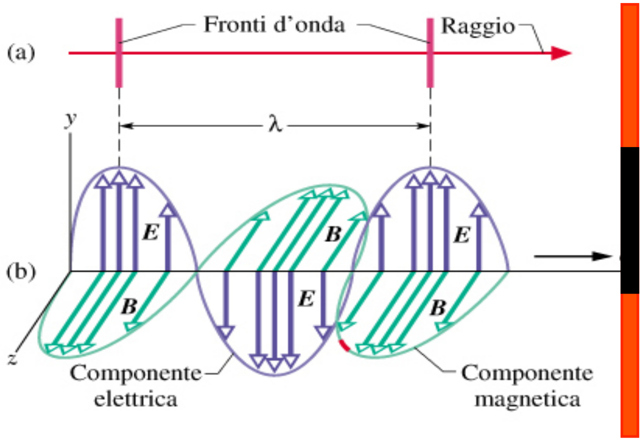
$$\frac{d\vec{F}}{d\Sigma} \cdot \vec{v} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \sigma \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$= \sigma E v$$

energia media assorbita per unita` di tempo e superficie = intensita` ceduta dall'onda

$$I = \sigma < E v >$$

Quantita` di moto



$d\Sigma$

superficie con densita` di carica σ

$$I = \sigma < E\,\mathrm{v} >$$

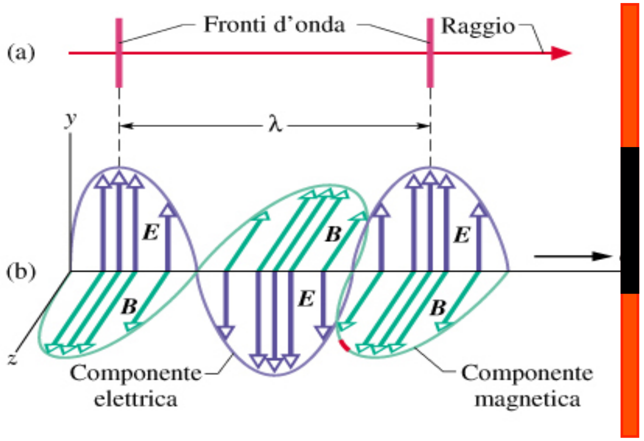
forza magnetica normale alla superficie individuata da **v** e **B**

diretta lungo il verso di propagazione dell'onda

$$\frac{d\vec{F}_M}{d\Sigma} = \sigma < \vec{\mathrm{v}} \times \vec{B} > = \sigma < \mathrm{v}\,B > \vec{e}_x = \sigma < \mathrm{v}\frac{E}{c} > \vec{e}_x = \frac{I}{c}\vec{e}_x$$

forza media per unita` di superficie = **pressione**

Quantita` di moto



$d\Sigma$

superficie con densita` di carica σ

$$I = \sigma < E\,\mathrm{v} >$$

pressione di radiazione $P_{\text{rad}} = \dfrac{I}{c}$

l'onda cede la quantita` di moto $\mathbf{F}_M$ per unita` di tempo e superficie

(perfettamente **assorbente**)

se la superficie e` perfettamente **riflettente** la quantita` di moto cambia verso e quella trasferita e` doppia

$$P_{\text{rad}} = 2\frac{I}{c}$$

per un angolo di incidenza θ le espressioni vanno moltiplicate per il fattore $\cos^2\theta$ – componente normale ($\cos\theta$) e aumento dell'area ($\cos\theta$)

Velocita` di fase e gruppo

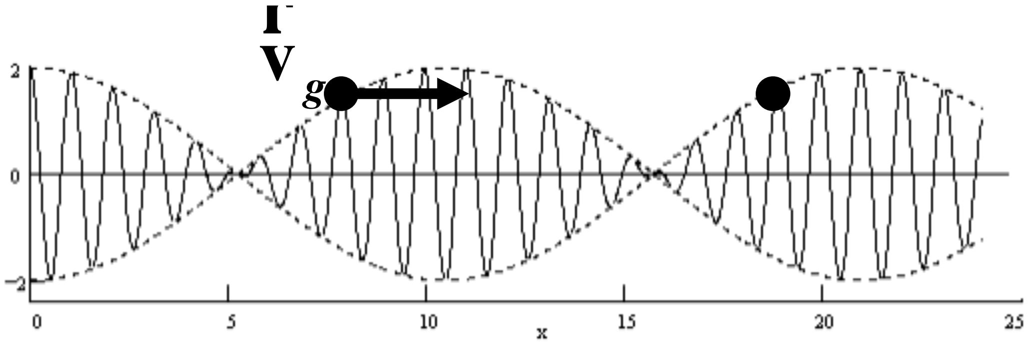
- Affinche` trasporti “informazione” un segnale non puo` essere puramente periodico (**informazione = cambiamento** nell’onda)

$$\Psi(t,x) = \cos\left[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x\right] + \cos\left[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x\right]$$

$$= 2\cos\left[\Delta\omega t - \Delta k x\right]\cos\left[\omega t - kx\right]$$

“ampiezza”

onda sinusoidale



velocita` del “contenuto”

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

Esempio

- Guida d'onda: la geometria impone un taglio alle frequenze che si possono propagare (simile alle canne di un organo)

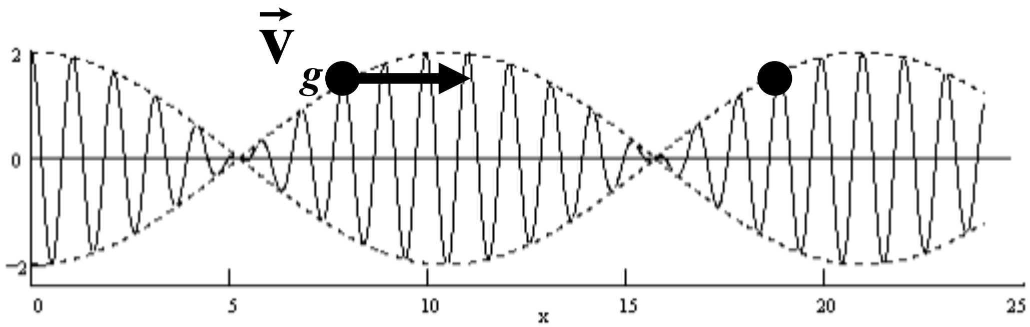
La configurazione dominante di onde che si propagano ha una relazione tra il numero d'onda e la frequenza

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

relazione di dispersione

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \xrightarrow[\omega\to\omega_0]{} \infty$$

$$v_{\text{gruppo}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \le c$$



$\vec{v}_g$
2
0
−2
0
5
10
15
20
25
x