Corrente di spostamento ed equazioni di Maxwell

- Corrente di spostamento
- Modifica della legge di Ampere
- Equazioni di Maxwell
- Onde elettromagnetiche

Corrente di spostamento

- La legge di Ampere e` inconsistente con la legge di conservazione della carica elettrica

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0$$ sempre

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$ **<u>solo</u>** per correnti stazionarie

Corrente di spostamento

- Maxwell: l' equazione di continuita` della carica elettrica deve valere sempre

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(a rigore vale nel solo caso elettrostatico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Corrente di spostamento

- La corrente totale da considerare e`

$$\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{J}_S \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

- *Maxwell* ***predisse*** *che le* ***variazioni nel tempo di un campo elettrico***, ***anche in assenza di correnti di conduzione***, *avrebbero* ***generato un campo magnetico***

Corrente di spostamento

- Se in un punto dello spazio la corrente di conduzione e` zero, ma $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow$

esiste un campo magnetico il cui rotore e` dato da

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Legge di Ampere-Maxwell

- La legge di Ampere e` modificata in

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

non associata a
moto di cariche

Legge di Ampere-Maxwell

- La legge di Ampere e` modificata in

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

- *1887: Hertz compie esperimenti che dimostrano l'esistenza di onde elettromagnetiche, previste dalle nuove equazioni*

Forma integrale

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dA \quad = \mu_0 \left(i + i_s \right)$$

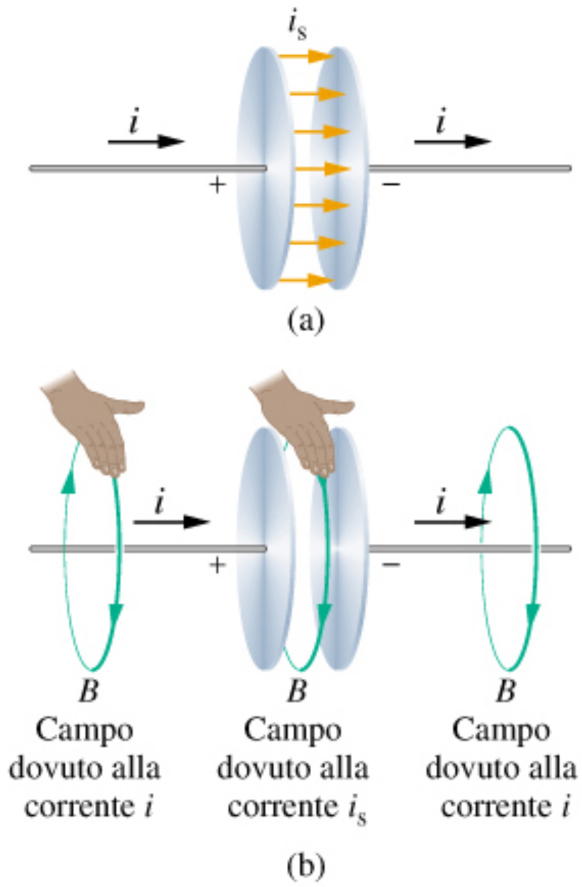
$$\mu_0 i_S = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n}\, dA \quad = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t}$$

$$\mu_0 i_S \simeq 1.1 \cdot 10^{-17} \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} \quad \frac{V/m}{s}$$

e` necessaria una variazione molto rapida nel tempo del campo elettrico

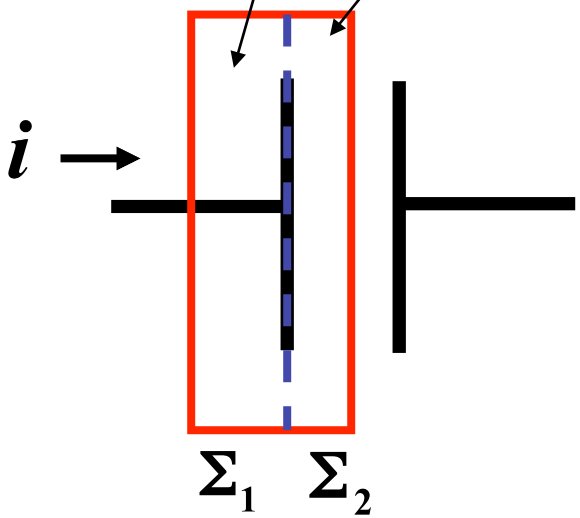
Corrente di spostamento

- Durante il processo di carica si accumula la cairca dq su una armatura e viene prelevata la carica –dq dall' altra
- Le correnti corrispondenti sono i=dq/dt entrante e i=-(-dq/dt)=dq/dt uscente
- Si puo` usare la legge di Ohm, ma tra le armature non c' e` corrente di conduzione
- Il flusso della densita` di corrente attraverso una superficie che racchiude entrambe le armature e` nullo (se le derivate rispetto al tempo non sono troppo grosse) come se ci fosse continuita`



Corrente di spostamento

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$



$$\oint_{C(\Sigma_1)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = i = \frac{dq}{dt}$$

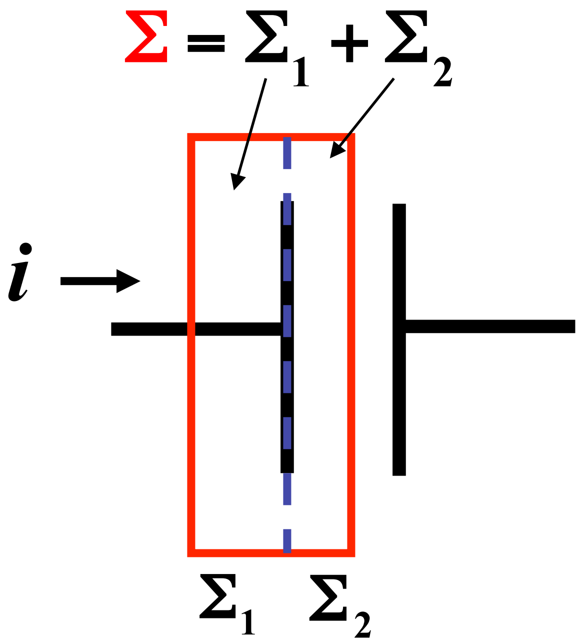
$$\oint_{C(\Sigma_2)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(\Sigma_1)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

poggia sullo stesso contorno

$$= \Phi_{\Sigma_2}(\vec{J}) = 0$$

$\vec{J}$ non e` solenoidale

Corrente di spostamento



- Il termine di corrente di spostamento risolve la contraddizione
- Oltre alla corrente di conduzione i esiste un campo elettrico E che varia nel tempo tra le armature (supponiamo solo li')

$$\vec{J}_1 = \vec{J} + \vec{J}_S = \vec{J}$$

$$\vec{J}_1 = \vec{J} + \vec{J}_S = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{J} + \vec{J}_S$ e\` solenoidale

⇨ **i due flussi devono essere uguali**

Equazioni di Maxwell

- *Nel vuoto, in presenza di cariche e correnti di conduzione distribuite con densita` ρ e* ***J*** *le equazioni che descrivono i campi elettrico e magnetico per fenomeni sia stazionari che dipendenti dal tempo sono:*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equazioni di Maxwell

- *Nel vuoto, in regioni in cui sono assenti cariche e correnti di conduzione si ha:*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equazioni di Maxwell

- Realizzano la sistemazione e ***unificazione*** dei fenomeni elettrici e magnetici
- In generale campi elettrici e magnetici non possono essere zero simultaneamente, sono descrivibili come aspetti di un'unica interazione fondamentale legata all'esistenza della ***carica elettrica***
- Le equazioni di Maxwell sono ***invarianti per trasformazioni di Lorentz***: non e` possibile stabilire il proprio stato di moto inerziale attraverso esperimenti di elettromagnetismo

Equazione delle onde (d' Alembert)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$f(t,x) = A\Psi_1(x - \mathrm{v}\,t) + B\Psi_2(x + \mathrm{v}\,t)$$

quantita` che si propaga lungo l' asse x positivo con velocita` v

quantita` che si propaga lungo l' asse x negativo con velocita` v

supponiamo B=0 (condizioni al contorno e iniziali)

Equazione delle onde (d' Alembert)

$$\Psi(t - \frac{x}{v})$$

fissato t-x/v la funzione ha un valore costante

$$t - \frac{x}{v} \equiv \hat{t} \Rightarrow x = v(t - \hat{t})$$

perturbazione che si muove con velocita` v=dx/dt

analogamente $\Psi(t+x/v)$ descrive una perturbazione che si muove con velocita` -v

Onde elettromagnetiche

- Si possono derivare le equazioni delle onde per i campi elettrico e magnetico direttamente dalle equazioni di Maxwell o dalla equazione delle onde per i potenziali

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Onde elettromagnetiche

- Si possono derivare le equazioni delle onde per i campi elettrico e magnetico direttamente dalle equazioni di Maxwell o dalla equazione delle onde per i potenziali

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$