Sorgenti del campo magnetico. Equazioni della magnetostatica.

- Azioni magnetiche tra circuiti
- Legge di Ampere
- Equazioni della magnetostatica
- Potenziale vettore

Azioni magnetiche su circuiti

- Leggi elementari di Laplace ➔ forza tra due circuiti percorsi dalle correnti i_1 e i_2

$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{u}_1)}{r^2}$$

$\vec{u}_1$ versore da $d\vec{l}_1$ a $d\vec{l}_2$

Puo` succedere che $d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21}$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

sempre

Azioni magnetiche su circuiti

$$\boxed{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{u}_1) = (d\vec{l}_2 \cdot \vec{u}_1)\,d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\,\vec{u}_1}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \left[\frac{(d\vec{l}_2 \cdot \vec{u}_1)\,d\vec{l}_1}{r^2} - \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\,\vec{u}_1}{r^2} \right]$$

$$= -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

circuitazione di un gradiente

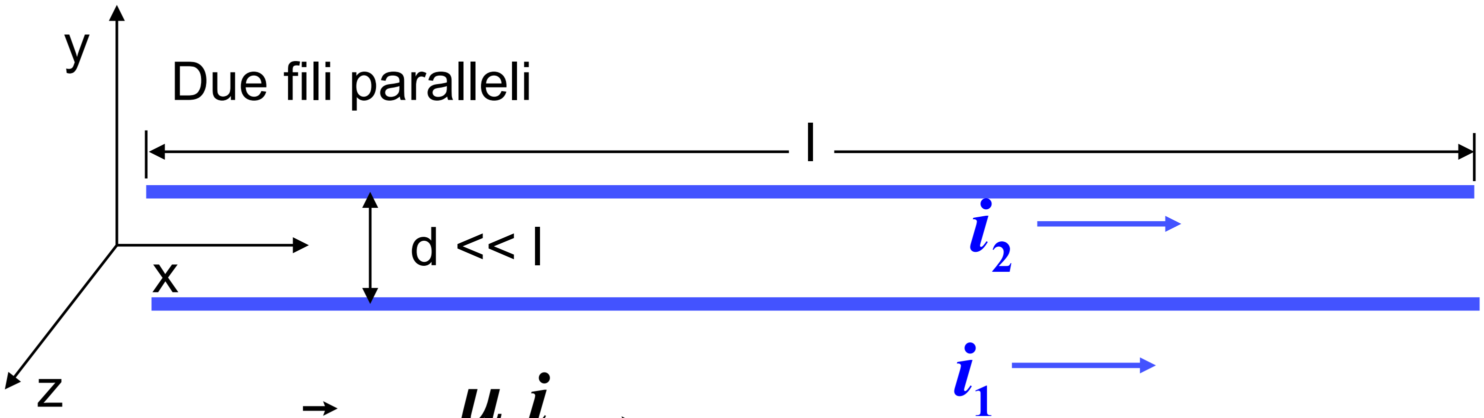
$$= 0$$

Azioni magnetiche su circuiti

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\vec{u}_1}{r^2}$$

- Scambiando 1 ←→ 2 e usando $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Se i 2 fili sono perpendicolari $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_{12} = 0$
- Se le correnti hanno lo stesso verso $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 > 0 \Rightarrow \vec{F}_{12}$ attrattiva
- Se le correnti hanno verso opposto la forza e` **repulsiva**

Azioni magnetiche su circuiti



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{12} = i_2 \int_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 l B_1 \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -l\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\vec{e}_y$$

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

Relazione tra campo magnetico e sue sorgenti

- Divergenza: aghi magnetici, mai monopoli

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Vale anche per i campi prodotti da correnti

$$\vec{\nabla}_x \cdot d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \vec{\nabla}_x \cdot \frac{d\vec{l}(\vec{x}\,') \times (\vec{x} - \vec{x}\,')}{\left|\vec{x} - \vec{x}\,'\right|^3}$$

Relazione tra campo magnetico e sue sorgenti

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{\nabla}\times\vec{a})\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$

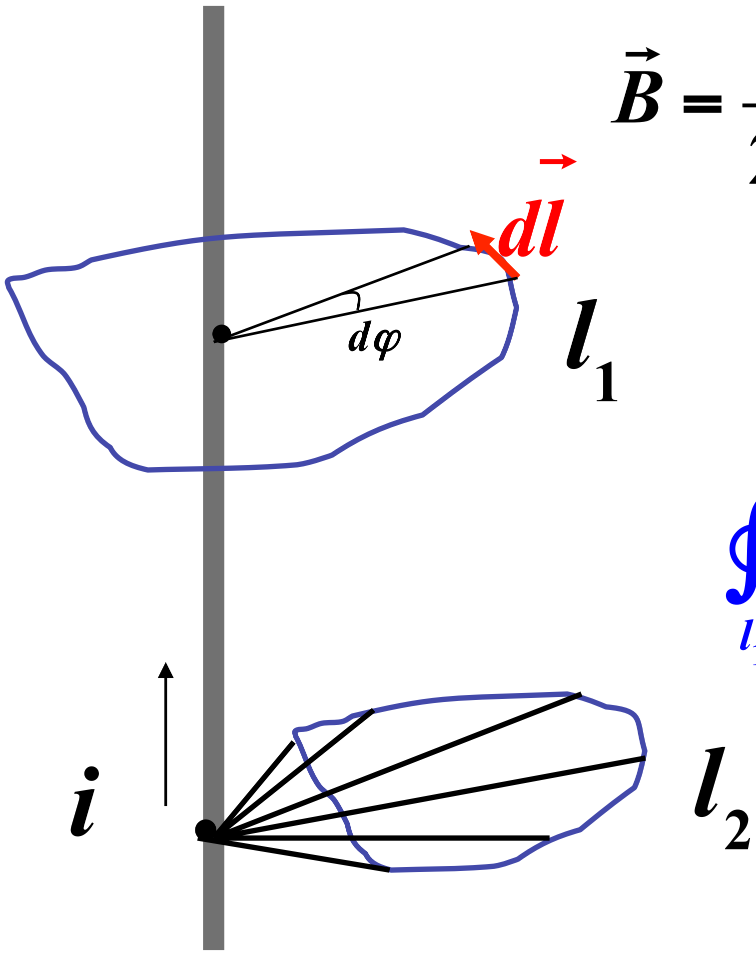
$$\vec{\nabla}_x \cdot \frac{d\vec{l}\,(\vec{x}\,')\times(\vec{x}-\vec{x}\,')}{\left|\vec{x}-\vec{x}\,'\right|^3} \qquad = 0$$

$$= \left(\vec{\nabla}_x \times d\vec{l}\,(\vec{x}\,')\right)\cdot \frac{(\vec{x}-\vec{x}\,')}{\left|\vec{x}-\vec{x}\,'\right|^3} - d\vec{l}\,(\vec{x}\,')\cdot\left(\vec{\nabla}_x \times \frac{(\vec{x}-\vec{x}\,')}{\left|\vec{x}-\vec{x}\,'\right|^3}\right)$$

= 0   = 0

non dipende da x   rotore di un gradiente

Legge di Ampere



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \qquad \vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

$$\vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi$$

$$\oint_{l_1} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$

$$\oint_{l_2} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi = 0$$

Legge di Ampere

- *Dati N fili percorsi dalle correnti i_1, i_2, ..., i_N e un circuito che ne concatena un sottoinsieme la **circuitazione** del campo magnetico su quel circuito fornisce la **somma delle correnti concatenate***
  - *(**corrente positiva**: circuitazione **antioraria** rispetto al suo verso, corrente **negativa**: circuitazione **oraria** rispetto al suo verso)*

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k \text{ concatenate da } C} i_k}$$

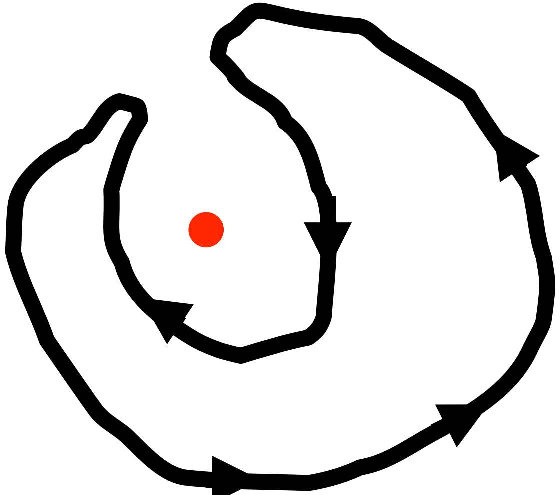
Legge di Ampere

Legge di Ampere

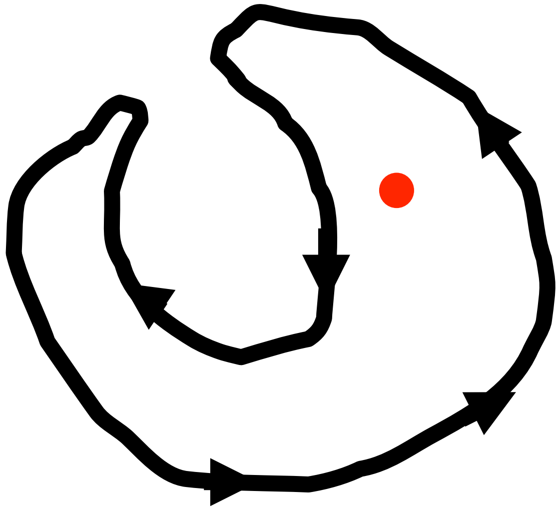
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k\ \text{conc}} i_k$$

- Il risultato vale per qualsiasi forma del circuito
- Il **campo** circuitato e` generato da **tutte** le correnti
- La sua **circuitazione** dipende **solo** dalle correnti **concatenate**

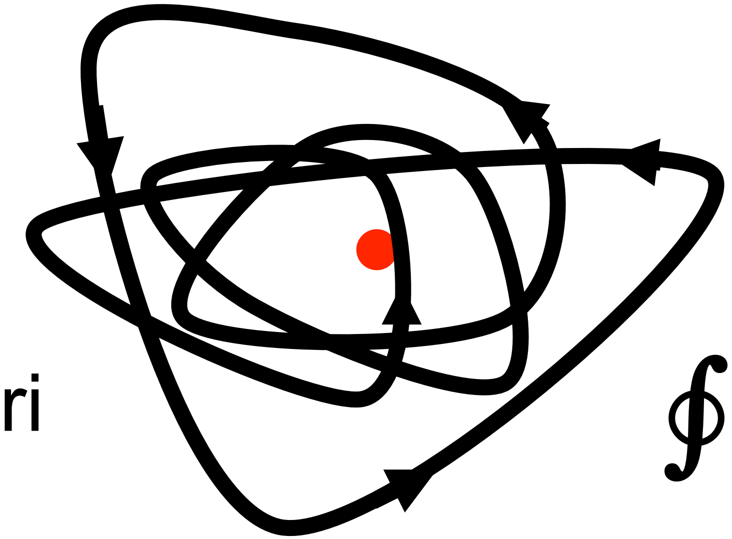
Legge di Ampere



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$



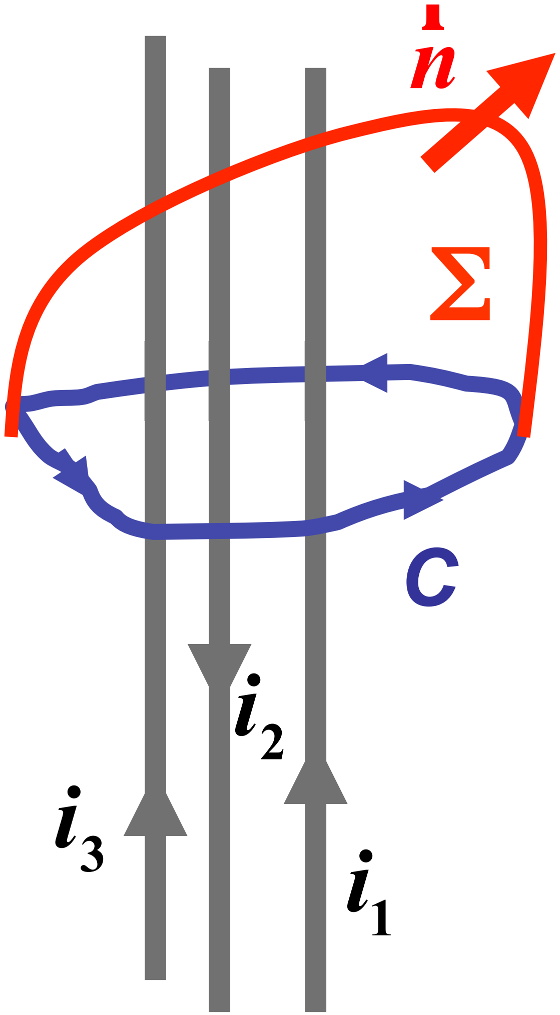
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$



N giri

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = N\mu_0 i$$

Legge di Ampere



Superficie che si appoggia sulla linea *C*

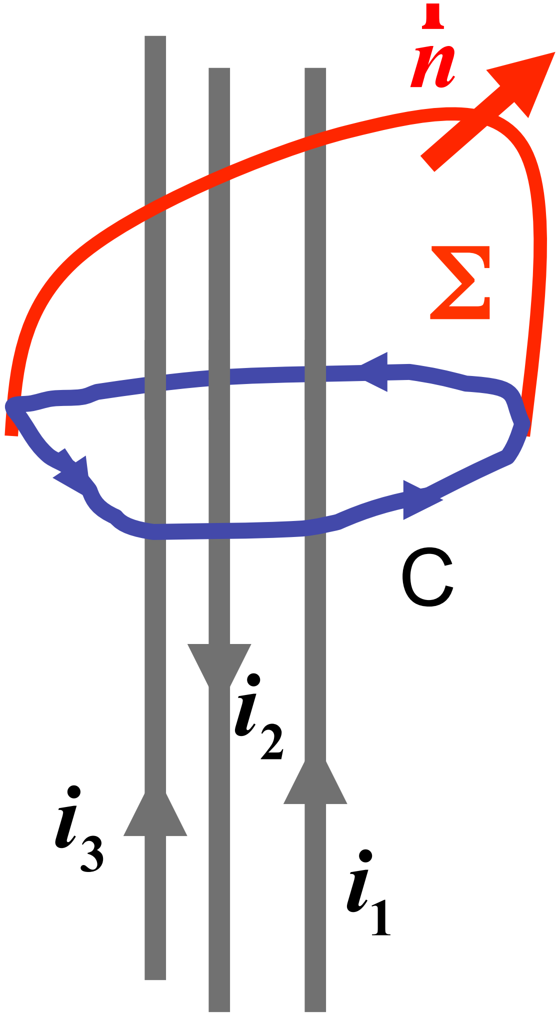
orientata rispetto alla circuitazione secondo la regola della mano destra

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k \text{ conc}} i_k$$

$$= \mu_0 (i_1 - i_2 + i_3)$$

I fili possono avere forma arbitraria

Legge di Ampere



Superficie che si appoggia sulla linea C

orientata rispetto alla circuitazione secondo la regola della mano destra

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k\ \mathrm{conc}} i_k = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot\vec{n}\, dA$$

Stokes → $\int_\Sigma \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot\vec{n}\, dA$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

I fili possono avere forma arbitraria

Legge di Ampere. rot B

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

- *L'equazione e` consistente con il fatto che la **corrente** e` **stazionaria***
- *Per correnti non stazionarie* $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
- *L'equazione non puo` essere valida*
- *Maxwell supero` l'inconsistenza con una modifica che la rende sempre valida*

Legge di Ampere.

- *Uso pratico simile a quello della legge di Gauss nell'elettrostatica*
- *Semplificazione dei calcoli del campo magnetico in presenza di simmetrie*
- *Da usare nei casi in cui la circuitazione del campo si fa "a vista"*

Equazioni di Maxwell per la magnetostatica

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \end{array}\right\}$$

Determinano **B** quando sia data **J**

E` univoco il campo **B**, assegnata **J** ?

Equazioni di Maxwell per la magnetostatica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{B}_1$$

entrambi

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \vec{B}_2$$

soluzioni

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

Equazioni di Maxwell per la magnetostatica

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

Soluzione: vettore costante $\vec{B}_0$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_2(\vec{r}) + \vec{B}_0$$

Equazioni di Maxwell per la magnetostatica

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_2(\vec{r}) + \vec{B}_0$$

- *Le equazioni di Maxwell, data una distribuzione di correnti, determinano il campo magnetico a meno di un campo costante su tutto lo spazio*

Potenziale vettore

- In elettrostatica la funzione potenziale scalare V(x,y,z) permette di calcolare il campo elettrostatico data una distribuzione di cariche

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

Potenziale vettore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Potenziale vettore

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j(\vec{\nabla}\times\vec{A})_k$$

$$=\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial_m A_n \qquad =\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\partial_m A_n$$

$$=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\partial_j\partial_m A_n$$

$$=\partial_i(\partial_j A_j)-\partial_j\partial_j A_i$$

Potenziale vettore

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Se al campo vettoriale **A** aggiungiamo un gradiente, il rotore non cambia

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla} f\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f}_{=0}$$

Invarianza di Gauge

possiamo scegliere f come ci pare

Potenziale vettore

Invarianza di Gauge

possiamo scegliere f come ci pare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \textit{(gauge fixing)}$$

Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0 \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 f$$

Basta scegliere f in modo tale che $\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Potenziale vettore

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Potenziale vettore

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

- *Stessa struttura dell'equazione di Poisson*
- *Una equazione per ogni componente del potenziale vettore*

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, dV'}$$

Potenziale vettore

Se la sorgente del campo e` costituita da una corrente stazionaria che circola in un circuito C si ha la corrsipondenza

$$\int \vec{J}(\vec{r}\,')dV' \rightarrow i\oint_C dl'$$

Dato un insieme di circuiti il potenziale vettore e` la somma dei contributi di ciascuno

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_k \frac{\mu_0 i_k}{4\pi} \oint_{C_k} \frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$