

---

# Sorgenti del campo magnetico.

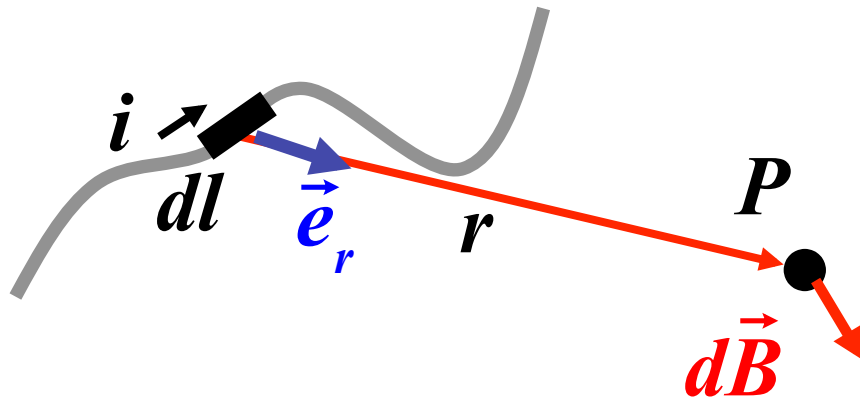
---

- Campo magnetico prodotto da una corrente
- Prima legge elementare di Laplace
- Legame campo elettrico e magnetico

# Campo magnetico prodotto da una corrente

## ■ Prima legge elementare di Laplace

- campo magnetico prodotto da un elemento  $dl$  di filo percorso dalla corrente  $i$ , alla distanza  $r$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$d\vec{B} \propto \frac{i}{r^2} \quad \text{regola vite destrorsa}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$$

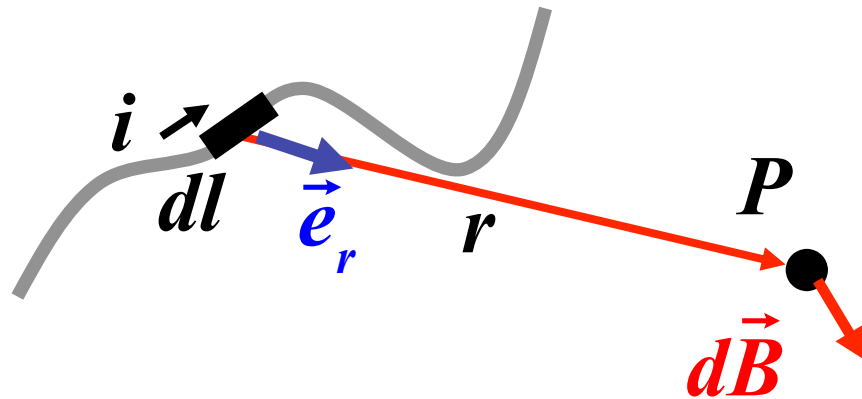
$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{Tm}{A} = 10^{-7} \frac{H}{m}$$

Permeabilita` magnetica del vuoto

# Campo magnetico prodotto da una corrente

## ■ Prima legge elementare di Laplace

- strumento di calcolo della sovrapposizione dei contributi al campo magnetico



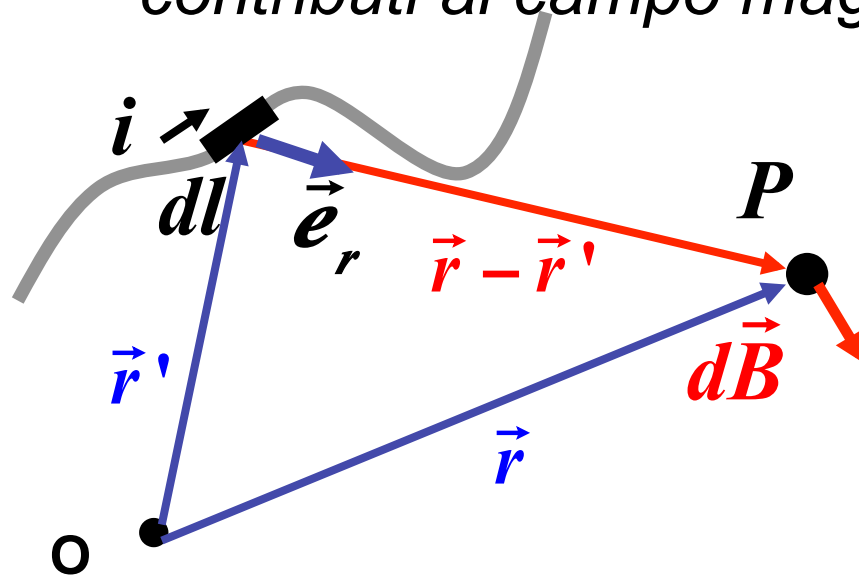
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

# Campo magnetico prodotto da una corrente

## ■ Prima legge elementare di Laplace

- *strumento di calcolo della sovrapposizione dei contributi al campo magnetico*



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} (\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

# Campo magnetico prodotto da una corrente

- Distribuzioni tridimensionali di corrente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} (\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$i d\vec{l} \rightarrow \vec{J} dV$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \vec{e}_r}{r^2} dV$$

# Carica puntiforme in moto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \vec{e}_r}{r^2} d^3x \quad \vec{J} = nq\vec{v}$$

Contributo di ciascuna singola carica  
(campo generato da una carica puntiforme)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

Campo elettrico

$$E_{\parallel}^{\text{LAB}} = E_{\parallel}^q \quad \text{se } v \ll c \Rightarrow \beta \ll 1 \Rightarrow \gamma \approx 1$$
$$E_{\perp}^{\text{LAB}} = \gamma E_{\perp}^q \quad \vec{E}^{\text{LAB}} \simeq \vec{E}^q$$

$$\vec{E} \simeq \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \vec{v} \times \vec{E}$$

$$(\beta \ll 1)$$

# Carica puntiforme in moto

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E}$$

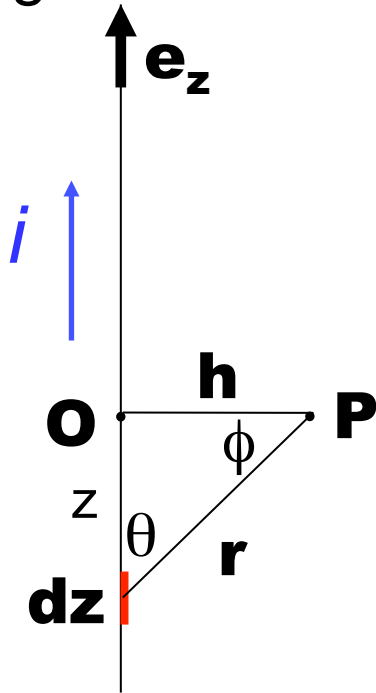
collega i campi elettrico e magnetico di una carica puntiforme in moto ( $\beta \ll 1$ )

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$B \approx \frac{v E}{c^2} = \beta \frac{E}{c}$$

# Esempio: filo rettilineo percorso da corrente

- Filo percorso da corrente  $i$ . Determinare il campo magnetico a distanza  $h$  dal filo.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

In P il campo e' ortogonale e diretto verso l'interno del foglio

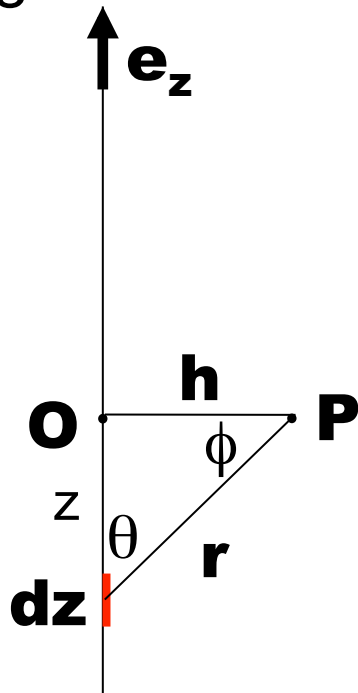
$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = r dz \sin \theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta dz}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \phi dz}{r^2}$$



# Esempio: filo rettilineo percorso da corrente

- Filo percorso da corrente  $i$ . Determinare il campo magnetico a distanza  $h$  dal filo.



$$dB = \frac{\mu_0 i \cos \varphi dz}{4\pi r^2}$$

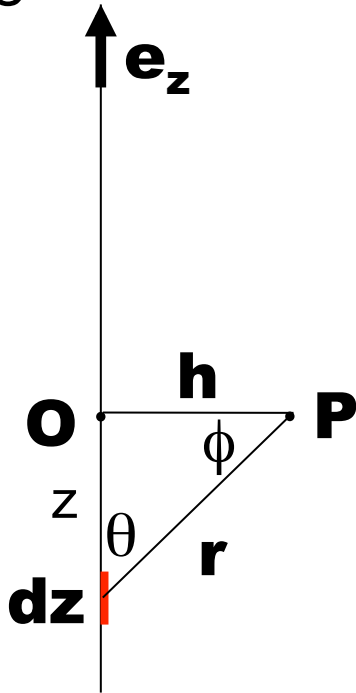
$$z = h \tan \varphi$$

$$\Rightarrow dz = h(\tan \varphi)' d\varphi = h \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$r = \frac{h}{\cos \varphi}$$

# Esempio: filo rettilineo percorso da corrente

- Filo percorso da corrente  $i$ . Determinare il campo magnetico a distanza  $h$  dal filo.

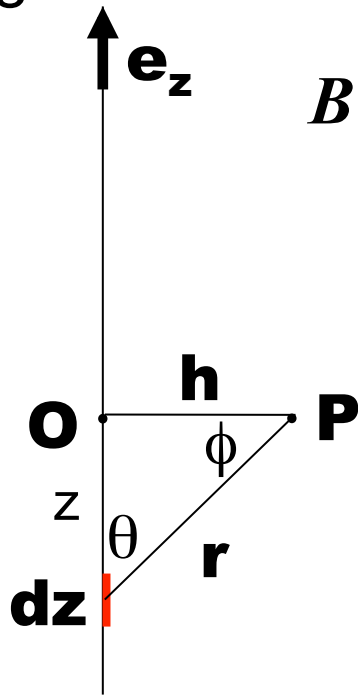


$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{h^2} h \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{h} d\varphi$$

# Esempio: filo rettilineo percorso da corrente

- Filo percorso da corrente  $i$ . Determinare il campo magnetico a distanza  $h$  dal filo.



$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$

mandando la lunghezza del filo all' infinito

$$\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 \rightarrow +\frac{\pi}{2}$$

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \rightarrow 2$$

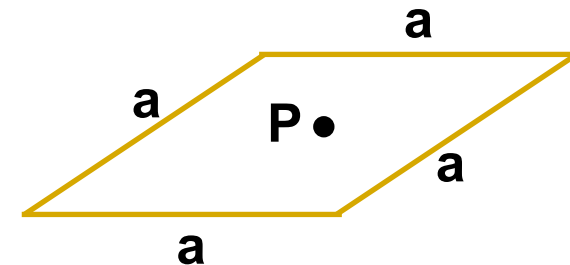
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}$$

# Esempio: spira quadrata

- Campo nel centro del quadrato

Ogni lato e` un filo di lunghezza  $a$

Dista  $a/2$  dal centro del quadrato

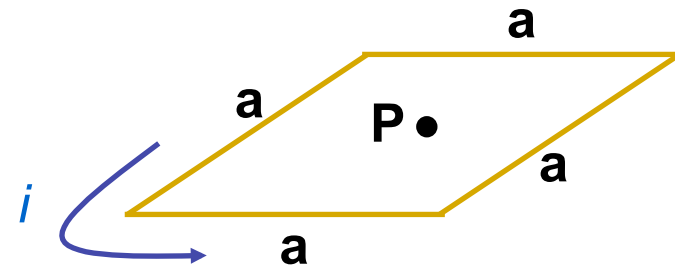


$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi \frac{a}{2}} \left[ \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \right] \Bigg|_{\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi \frac{a}{2}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \sqrt{2} \quad \text{un lato}$$

# Esempio: spira quadrata

- Campo nel centro del quadrato

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left[ 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{un lato}$$



moltiplicando per 4

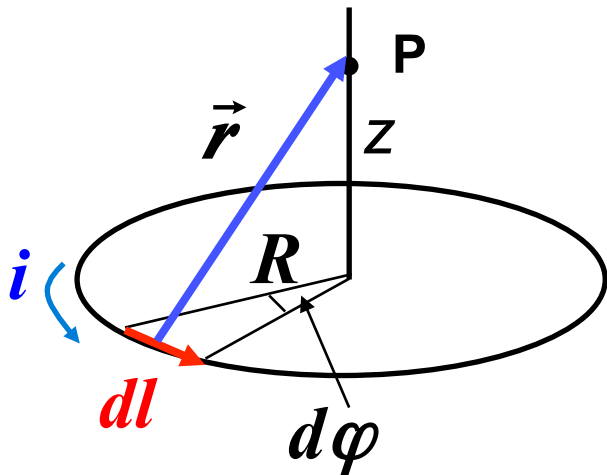
$$\vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a} \vec{e}_z$$

(corrente antioraria)

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i a^2}{\pi a \cdot a^2} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 2m}{\pi a^3}$$

# Esempio. Spira circolare.

- Spira circolare piana di raggio  $r$ . Campo sull'asse passante per il centro, a distanza  $z$ .



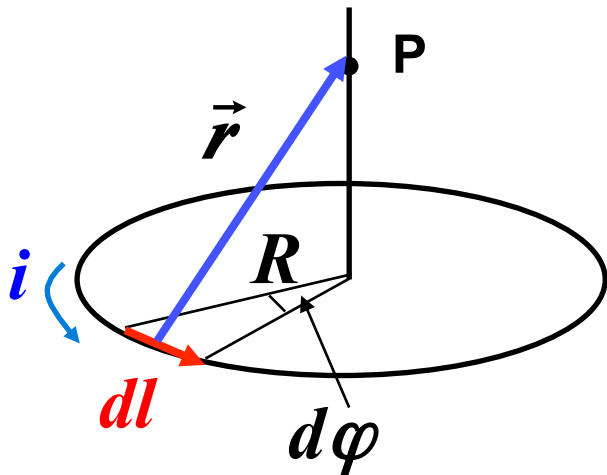
$$d\vec{l} = R d\varphi \vec{e}_\varphi \quad \vec{r} = -R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

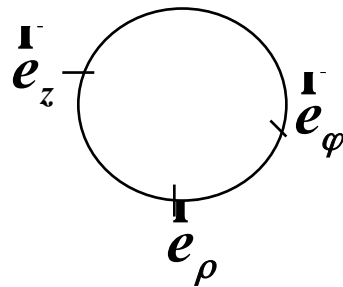
$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R d\varphi \vec{e}_\varphi \times (-R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z)}{r^3}$$

# Esempio. Spira circolare.

- Spira circolare piana di raggio  $r$ . Campo sull'asse passante per il centro, a distanza  $z$ .



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R d\varphi \vec{e}_\varphi \times (-R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z)}{r^3}$$

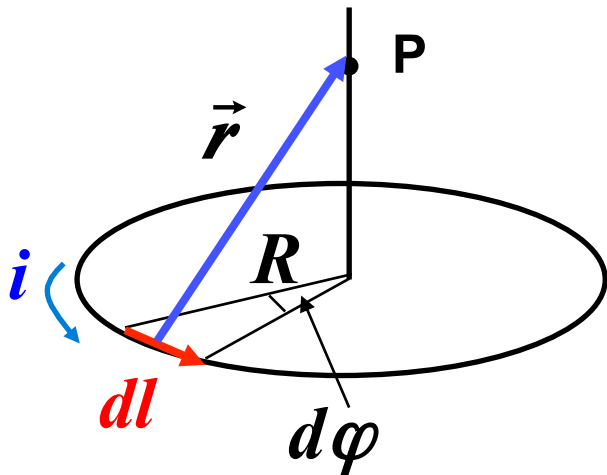


$$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho = -\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$$

# Esempio. Spira circolare.

- Spira circolare piana di raggio  $r$ . Campo sull'asse passante per il centro, a distanza  $z$ .

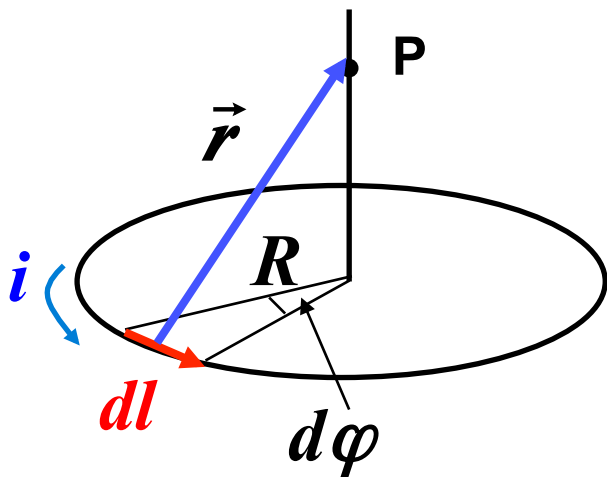


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R d\varphi \vec{e}_\varphi \times (-R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z)}{r^3}$$
$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R d\varphi (R \vec{e}_z + z \vec{e}_\rho)}{r^3}$$



# Esempio. Spira circolare.

- Spira circolare piana di raggio  $r$ . Campo sull'asse passante per il centro, a distanza  $z$ .



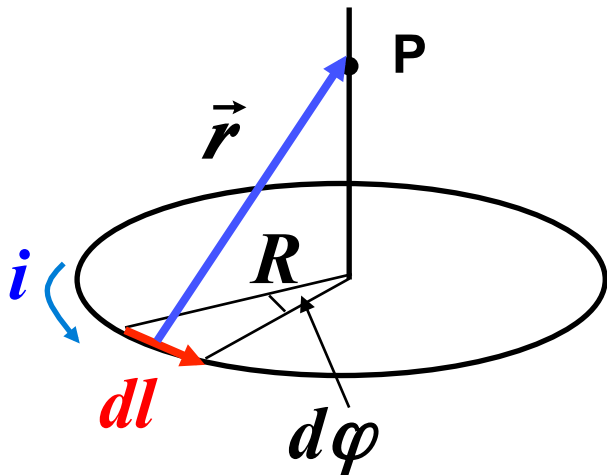
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{R \vec{e}_z + z \vec{e}_\rho}{r^3} \right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\vec{e}_\rho}{r^3} = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R}{r^3} = \frac{\mu_0 i R^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3}$$

# Esempio. Spira circolare.

- Spira circolare piana di raggio  $r$ . Campo sull'asse passante per il centro, a distanza  $z$ .



$$B_z = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$z = 0 \Rightarrow B_z(0) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

$$z \gg R \Rightarrow B_z(z) \simeq \frac{\mu_0 i R^2}{2(z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i A}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3}$$

# Dipolo magnetico – dipolo elettrico

$$B_z(z) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3}$$

stessa struttura del dipolo elettrico  
a grande distanza rispetto alle dimensioni  
lineari della distribuzione

campo elettrostatico di un dipolo elettrico  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}]$

energia potenziale di interazione  
tra due dipoli elettrici

$$U_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r)]$$

# Dipolo magnetico – dipolo elettrico

$$B_z(z) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3}$$

stessa struttura del dipolo elettrico  
a grande distanza rispetto alle dimensioni  
lineari della distribuzione

campo magnetico del dipolo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ 3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m} \right]$$

energia potenziale di interazione  
tra due dipoli magnetici

$$U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{m}_2 \cdot \vec{e}_r) \right]$$

# Dipolo magnetico – dipolo elettrico

$$B_z(z) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3}$$

stessa struttura del dipolo elettrico  
a grande distanza rispetto alle dimensioni  
lineari della distribuzione

forza tra due dipoli

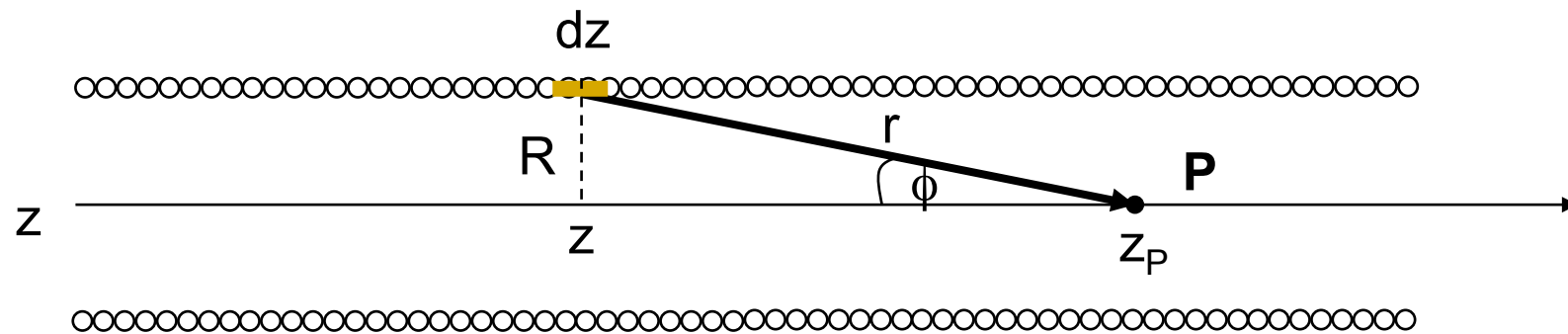
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

momento rispetto  
all'asse di rotazione

$$M_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

# Solenoido rettilineo

- Conduttore avvolto secondo un' elica cilindrica di passo piccolo rispetto alla sua lunghezza  $d$

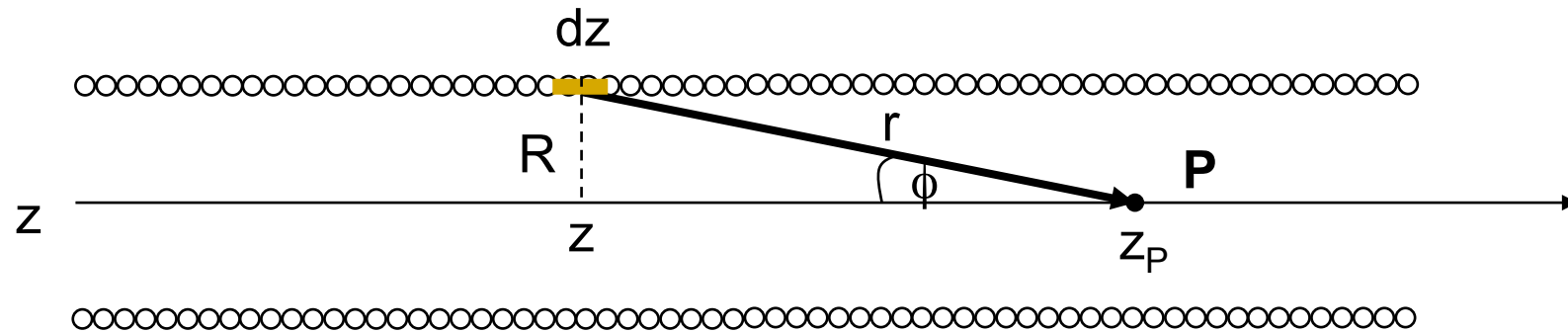


$$n = \frac{N}{d} \quad \text{singola spira}$$

spire per unita` di lunghezza

$$B_{\text{spira}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 i}{r^3} = \frac{\mu_0 R^2 i}{2r^3}$$

# Solenoido rettilineo



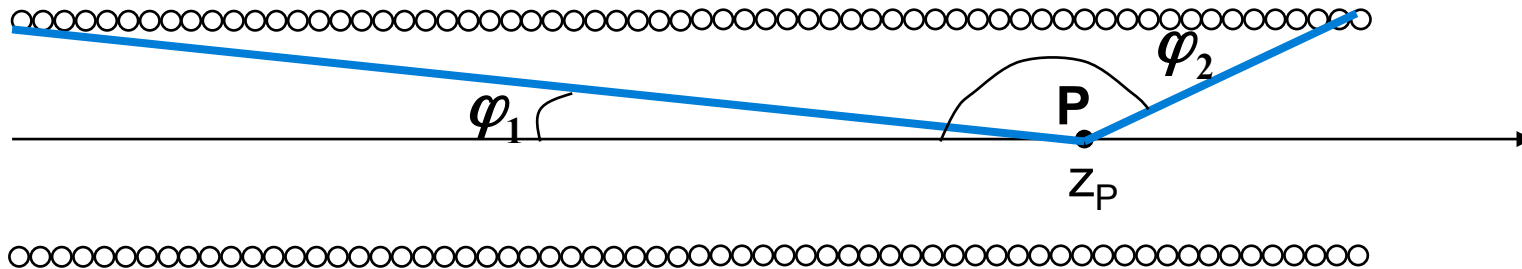
$$dB = B_{\text{spira}} ndz = \frac{\mu_0 n R^2 i}{2r^3} dz \quad \text{lungo l'asse del solenoide}$$

$$r \sin \varphi = R$$

$$(z_P - z) \tan \varphi = R$$

$$dz = \frac{R d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

# Solenoide rettilineo

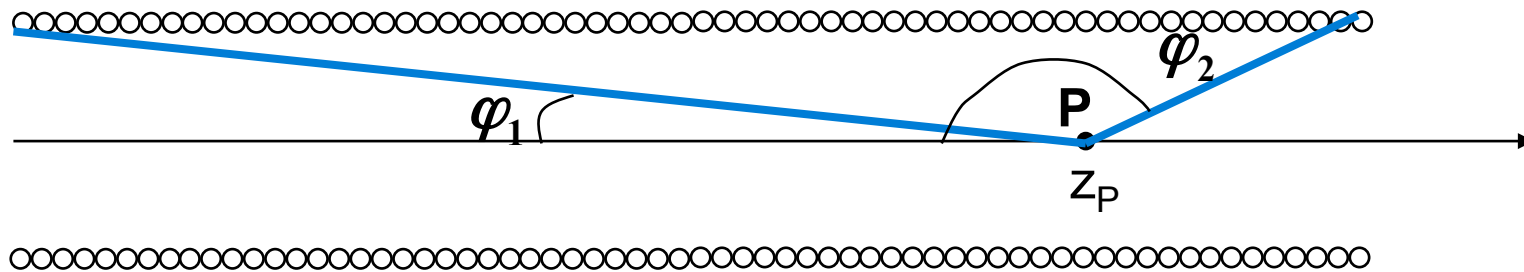


$$dB = \frac{\mu_0 n R^2 i}{2r^3} dz = \frac{\mu_0 n i}{2} \sin \varphi d\varphi$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$



# Solenoide rettilineo

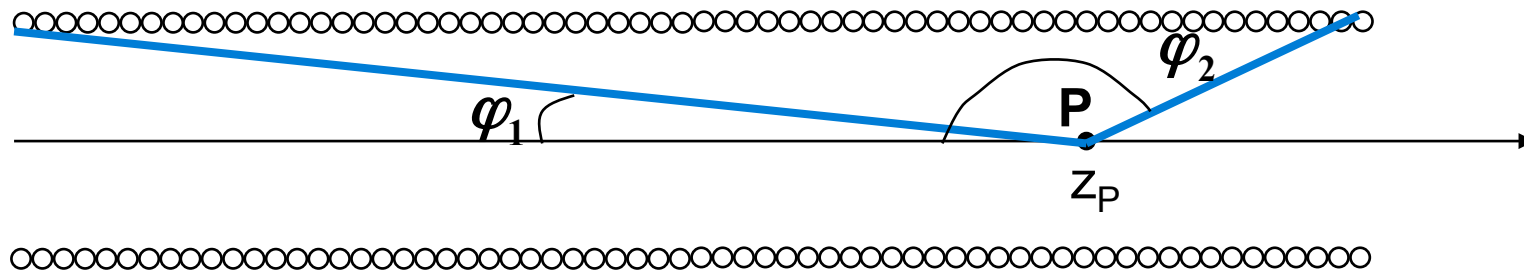


$$B = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

misurando z dal  
centro del solenoide

$$B(z) = \frac{\mu_0 ni}{2} \left[ \frac{d + 2z}{\sqrt{(d + 2z)^2 + 4R^2}} + \frac{d - 2z}{\sqrt{(d - 2z)^2 + 4R^2}} \right]$$

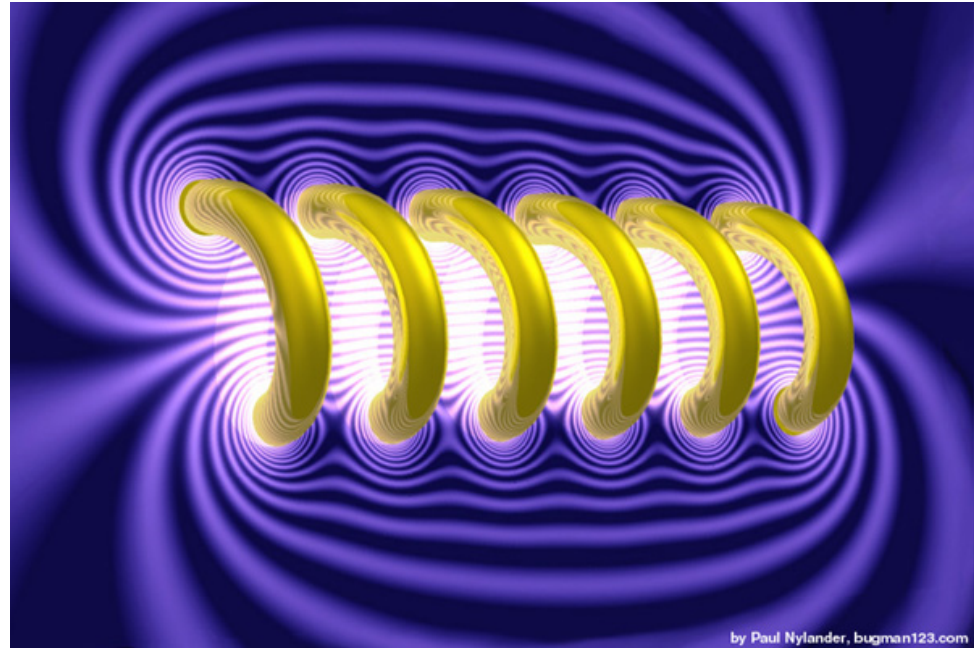
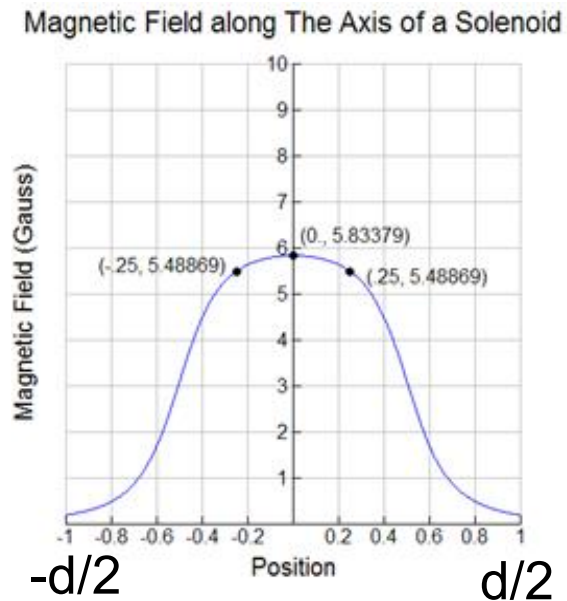
# Solenoide rettilineo



$$\text{Se } d \gg R \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow 0 \\ \varphi_2 \rightarrow \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \rightarrow 2$$

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \rightarrow B_\infty = \mu_0 ni$$

# Solenoide rettilineo



Per  $R/d \ll 1$  il campo è approssimativamente costante in una vasta zona. Al crescere di  $R/d$  la zona si restringe e si estende la zona all'esterno in cui il campo differisce apprezzabilmente da zero.