Campo magnetico e forza di Lorentz (II)

- Moto di particelle cariche in un campo magnetico
- Seconda legge elementare di Laplace
- Principio di equivalenza di Ampere
- Effetto Hall
- Galvanometro

Moto di una particella carica in un campo magnetico

$$\vec{F} = q\,\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = q\,\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}$$

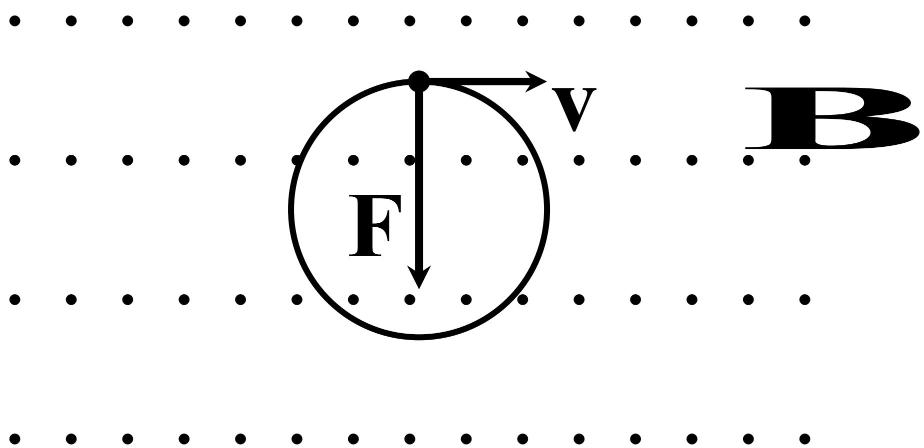
$$m\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt} = q\,\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}$$ (per v << c) $$\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}$$

precessione intorno a B
con velocita` angolare ω

Moto di una particella carica

- Supponiamo il campo magnetico ortogonale al piano del moto



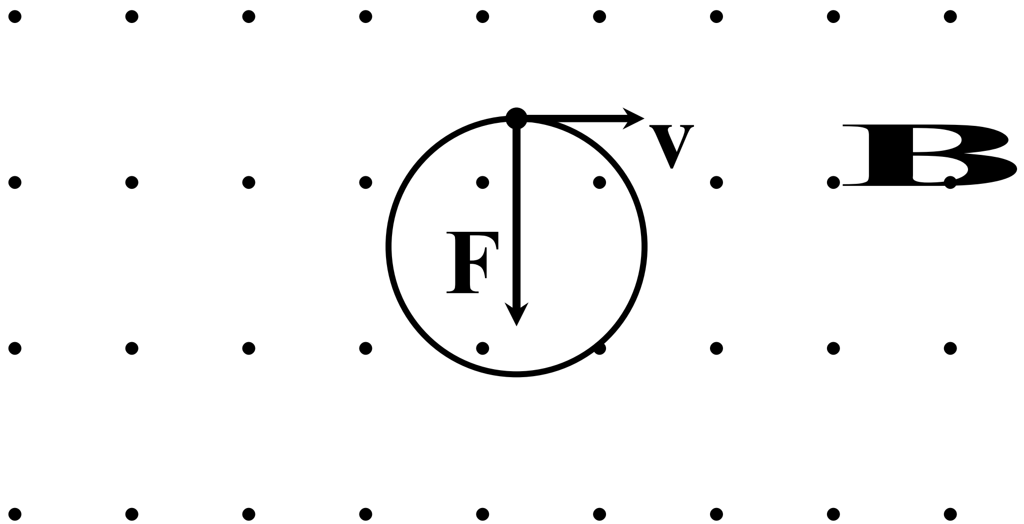
- **Non compie lavoro**
- **Forza centripeta**

$$|\mathbf{F}| = m\frac{\mathrm{v}^2}{R} = q\,\mathrm{v}\,B$$

$$\Rightarrow R = m\frac{\mathrm{v}}{qB} = \frac{p}{qB}$$

Moto di una particella carica

- Supponiamo il campo magnetico ortogonale al piano del moto



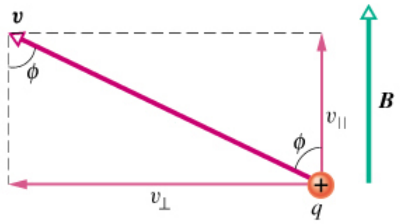
- **Non compie lavoro**
- **Forza centripeta**

$$|\mathbf{F}| = m\frac{\mathrm{v}^2}{R} = q\,\mathrm{v}\,B$$

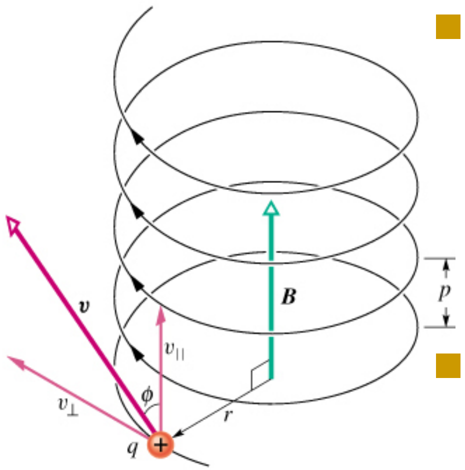
$$T = \frac{2\pi R}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi}{\omega}$$

senza correzioni relativistiche

Moto di una particella carica



(a)



(b)

- Se la velocità ha componente non nulla nella direzione di B, il percorso e` elicoidale
- Il passo dell'elica e` determinato dalla componente della velocita` parallela al campo magnetico
- Se la carica e` positiva, il moto – dalla punta del campo magnetico appare orario (antiorario se q<0)

Filo conduttore percorso da corrente elettrica (con B)

- Moto degli elettroni di conduzione

$$\vec{J} = -ne\vec{\mathrm{v}}_D$$

- Su ciascun elettrone si esercita la forza

$$\vec{F}_e = -e\vec{\mathrm{v}}_D \times \vec{B}$$

- Filo indeformabile: la forza e` trasmessa alla massa del filo attraverso l' interazione (urto) degli elettroni con il reticolo cristallino

Filo conduttore percorso da corrente elettrica (con B)

- Su un tratto di conduttore di sezione A e lunghezza dl sono contenuti $nAdl$ elettroni

$$d\vec{F} = nAdl\vec{F}_e = -nAdle\vec{v}_D \times \vec{B} = Adl\vec{J} \times \vec{B}$$

- Orientando il filo (dl) come la densita` di corrente e scrivendo **AJ=i**, si ottiene:

$$\boxed{d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}}$$

seconda legge elementare di Laplace

(approssimazione: si considera B costante sulla sezione del filo)

Filo conduttore percorso da corrente elettrica (con B)

- Su un filo di lunghezza finita con estremi A, B si esercita la forza:

$$\boxed{\vec{F} = i\int_A^B d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Forza come risultante di contributi elementari

Applicata al centro di massa

- Forza perpendicolare al filo e al campo magnetico, orientata secondo la regola della vite destrorsa
- **E` un espediente di calcolo, un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente non e` fisicamente realizzabile (un *loop* si)**

Filo conduttore percorso da corrente elettrica (con B)

- Filo **rettilineo**

$$\vec{F} = i\int_A^B d\vec{l} \times \vec{B} = i\left(\int_A^B d\vec{l}\right) \times \vec{B}$$

  - ***Il modulo del campo e` costante***
  - ***L'angolo θ tra il campo e il filo e` costante***

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \qquad F = ilB\sin\theta$$

Filo conduttore percorso da corrente elettrica (con B)

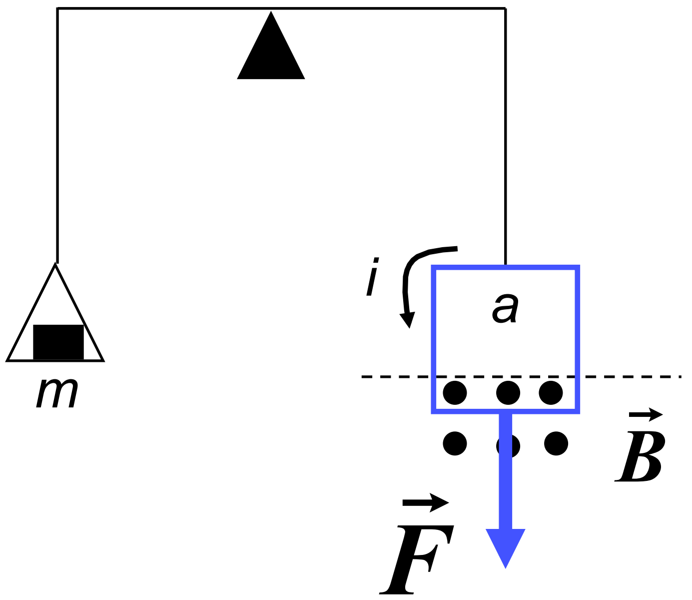
- Filo su un **piano**

$$\vec{F} = i\int_A^B d\vec{l} \times \vec{B} = i\int_A^B (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y) \times \vec{B}$$

$$= i(\Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y) \times \vec{B} = i\,\overrightarrow{AB} \times \vec{B}$$

- ***La forza su un filo che giace in un piano dipende solo dalla posizione dei suoi estremi***
- ***Se il filo e` chiuso la forza e` nulla (gli estremi coincidono AB=0)***

Esempio



a = 5 cm
i = 1 A
m = 0.5 g

B = ???

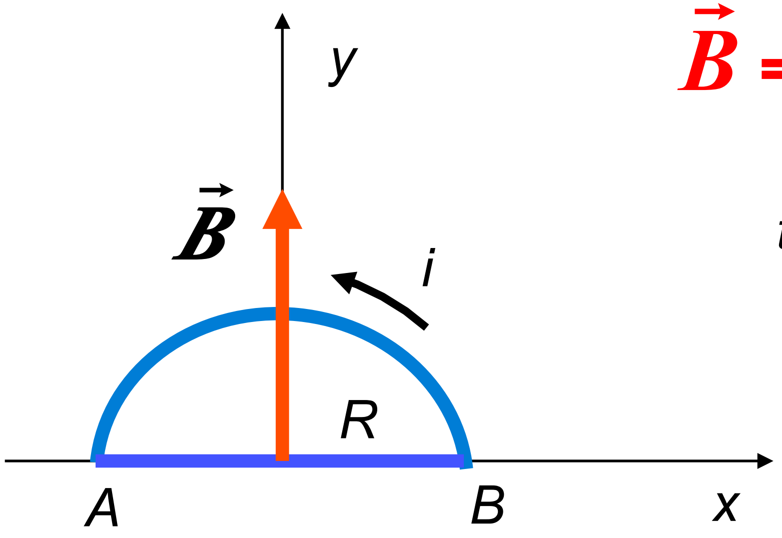
$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} = i\vec{a} \times \vec{B}$$

$$F = iaB$$

all'equilibrio $F = mg$

$$iaB = mg \quad \Rightarrow \quad B = \frac{mg}{ia} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}{1 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 9.8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}$$

Esempio



$$\vec{B} = B\vec{e}_y \qquad \overrightarrow{AB} = 2R\vec{e}_x$$

tratto rettilineo $\vec{F} = i\,\overrightarrow{AB} \times \vec{B}$

$$= 2iRB\vec{e}_x \times \vec{e}_y = 2iRB\vec{e}_z$$

Il circuito e` chiuso ➔ *sul tratto circolare:* $\vec{F} = -2iRB\vec{e}_z$

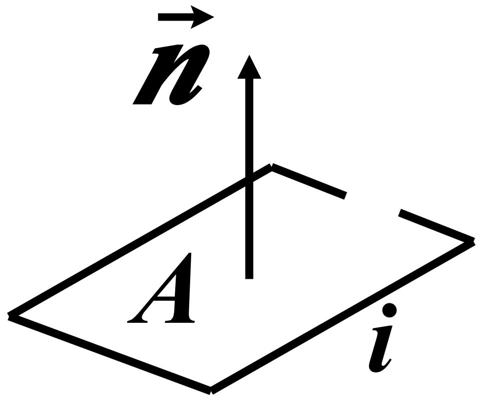
<u>*Verifica*</u> $d\vec{l} = -dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} = i(-dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y) \times B\vec{e}_y = -iBdx\vec{e}_z$$

$$\vec{F} = -iB\vec{e}_z \int_{-R}^{R} dx = -2iBR\vec{e}_z$$

Momento meccanico. Principio di equivalenza di Ampere.

- Momento magnetico di una spira piana di area A percorsa dalla corrente i



$$\boxed{\vec{m} = iA\vec{n}}$$

- Connessione con il momento meccanico quando e` immersa in un campo magnetico

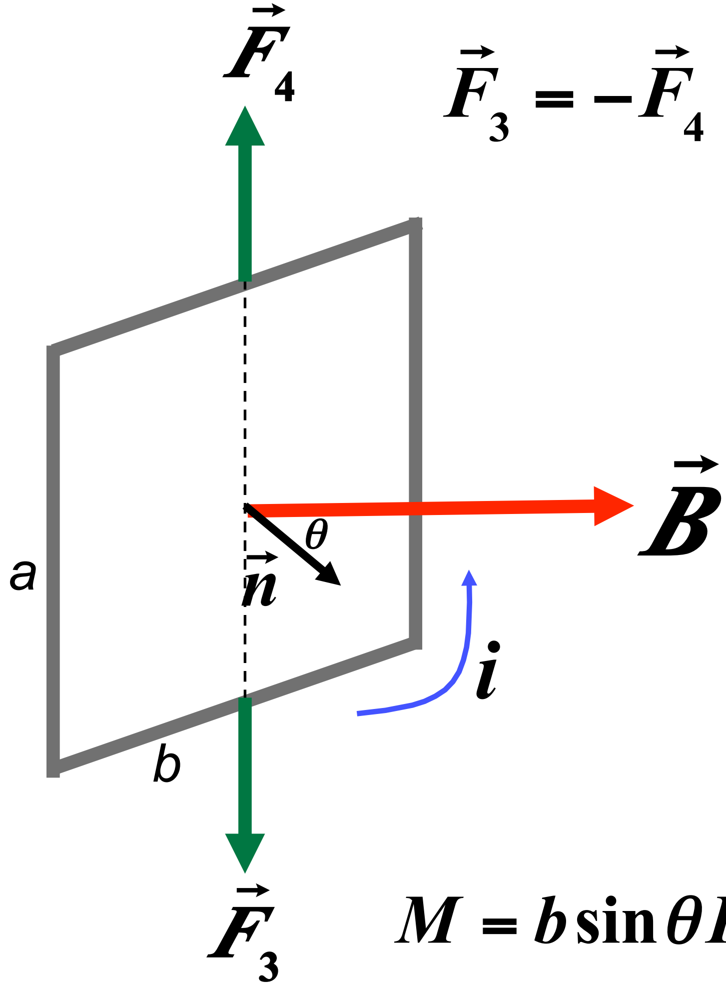
Spira in un campo magnetico

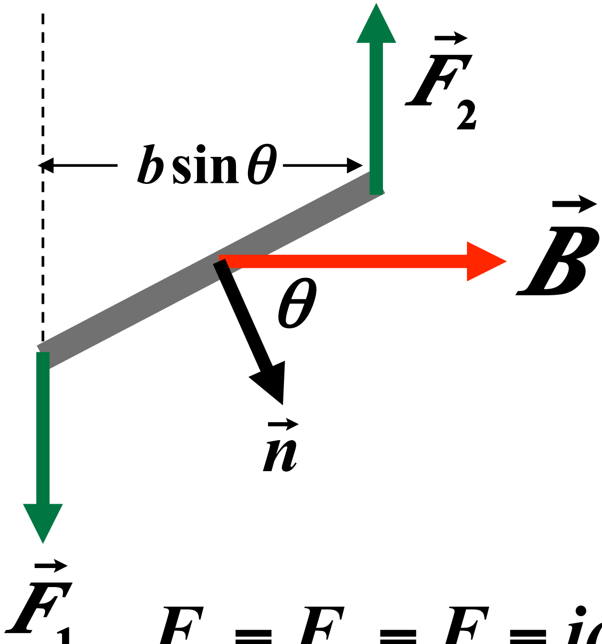
- Spira piana rigida
- Campo magnetico uniforme
- La forza totale e` nulla
- La spira non si sposta e non si deforma
- Il momento meccanico puo` essere diverso da zero
- La spira puo` compiere una rotazione

Spira in un campo magnetico

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$$

stessa retta di azione



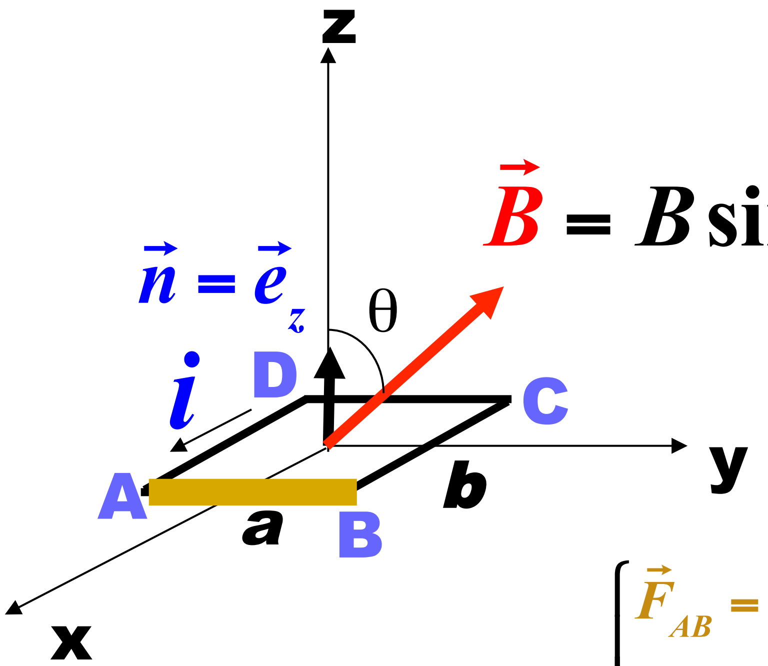


$$F_1 = F_2 = F = iaB$$

$$M = b\sin\theta F = iabB\sin\theta = iAB\sin\theta = mB\sin\theta$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

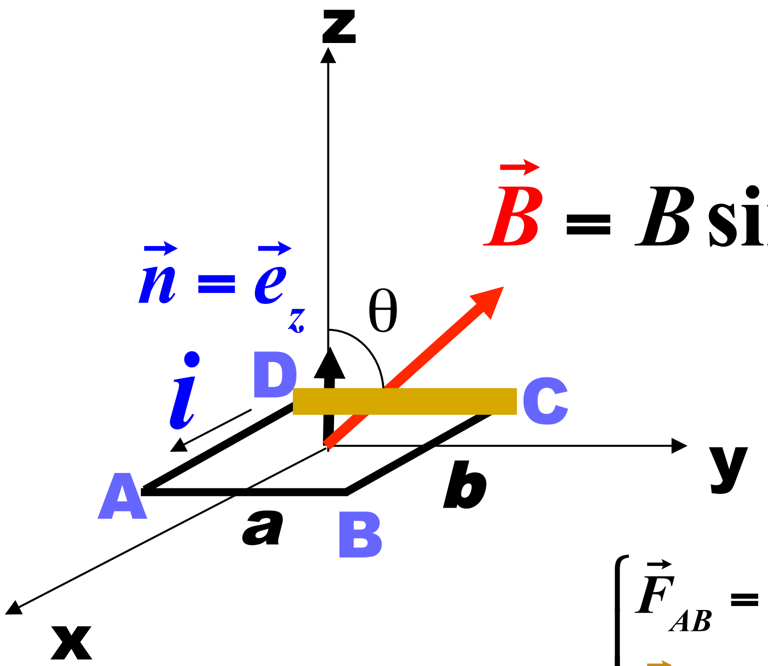
Spira in un campo magnetico



$$\vec{B} = B\sin\theta\,\vec{e}_y + B\cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{AB} = i\overbrace{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}^{a\vec{e}_y} \times \vec{B} = ia\vec{e}_y \times \vec{B} = iaB\cos\theta\,\vec{e}_x \\ \\ \end{cases}$$

Spira in un campo magnetico



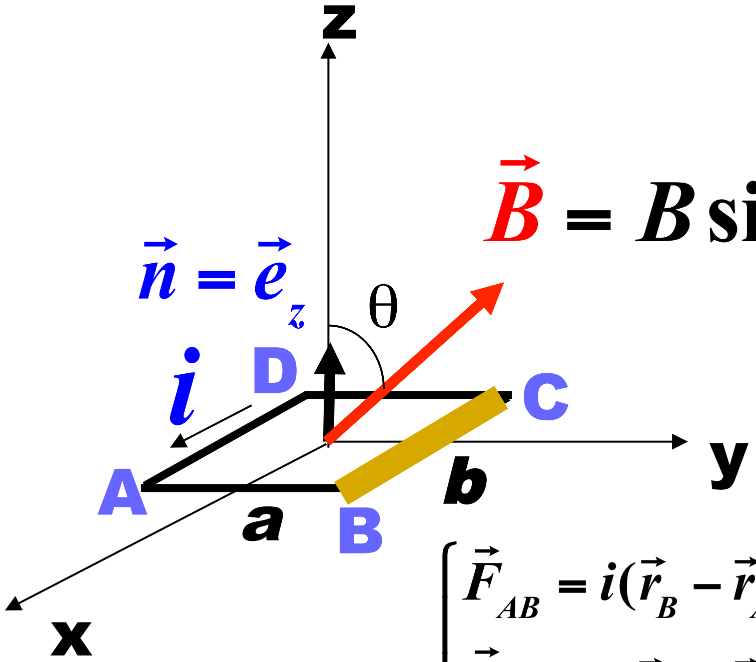
$$\vec{n} = \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = B\sin\theta\vec{e}_y + B\cos\theta\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{AB} = i(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\times\vec{B} = ia\vec{e}_y \times \vec{B} = iaB\cos\theta\vec{e}_x \\ \vec{F}_{CD} = i(\vec{r}_D - \vec{r}_C)\times\vec{B} = -\vec{F}_{AB} \end{cases}$$

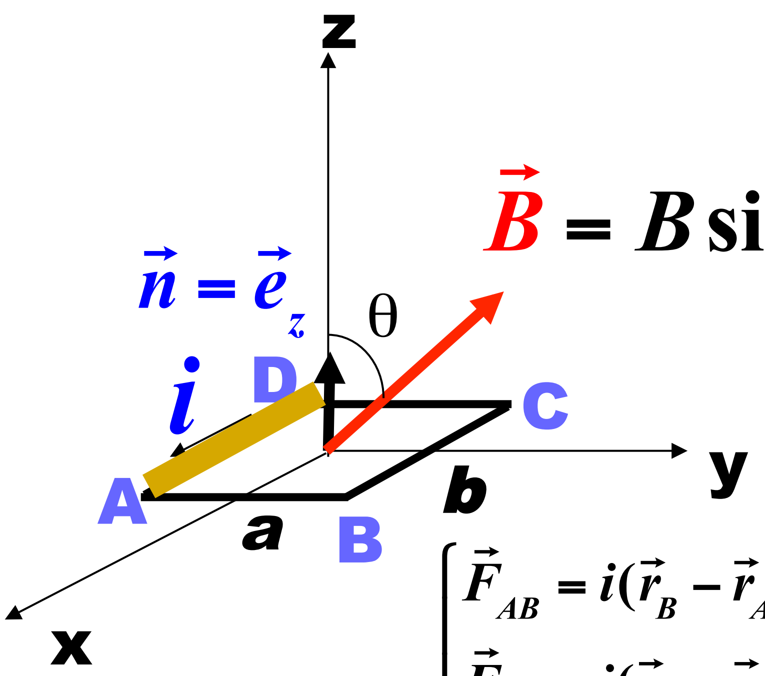
Spira in un campo magnetico

$$\vec{B} = B\sin\theta\,\vec{e}_y + B\cos\theta\,\vec{e}_z$$



$$\begin{cases} \vec{F}_{AB} = i(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\times\vec{B} = ia\vec{e}_y \times \vec{B} = iaB\cos\theta\,\vec{e}_x \\ \vec{F}_{CD} = i(\vec{r}_D - \vec{r}_C)\times\vec{B} = -\vec{F}_{AB} \\ \vec{F}_{BC} = i\underbrace{(\vec{r}_C - \vec{r}_B)}_{-b\vec{e}_x}\times\vec{B} = -ib\vec{e}_x \times \vec{B} = -ibB\sin\theta\,\vec{e}_z + ibB\cos\theta\,\vec{e}_y \end{cases}$$

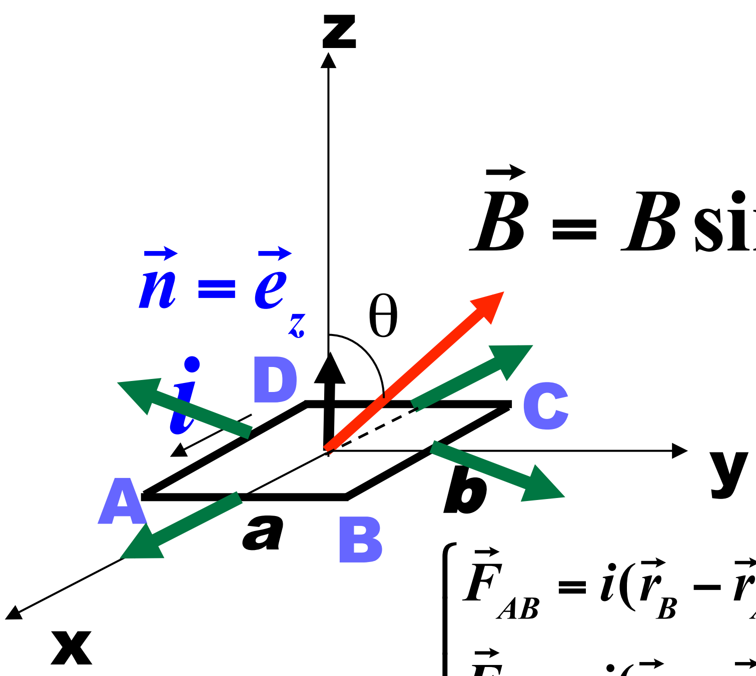
Spira in un campo magnetico



$$\vec{B} = B\sin\theta\vec{e}_y + B\cos\theta\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{AB} = i(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\times\vec{B} = ia\vec{e}_y\times\vec{B} = iaB\cos\theta\vec{e}_x \\ \vec{F}_{CD} = i(\vec{r}_D - \vec{r}_C)\times\vec{B} = -\vec{F}_{AB} \\ \vec{F}_{BC} = i(\vec{r}_C - \vec{r}_B)\times\vec{B} = -ib\vec{e}_x\times\vec{B} = -ibB\sin\theta\vec{e}_z + ibB\cos\theta\vec{e}_y \\ \vec{F}_{AD} = i(\vec{r}_A - \vec{r}_D)\times\vec{B} = -\vec{F}_{BC} \end{cases}$$

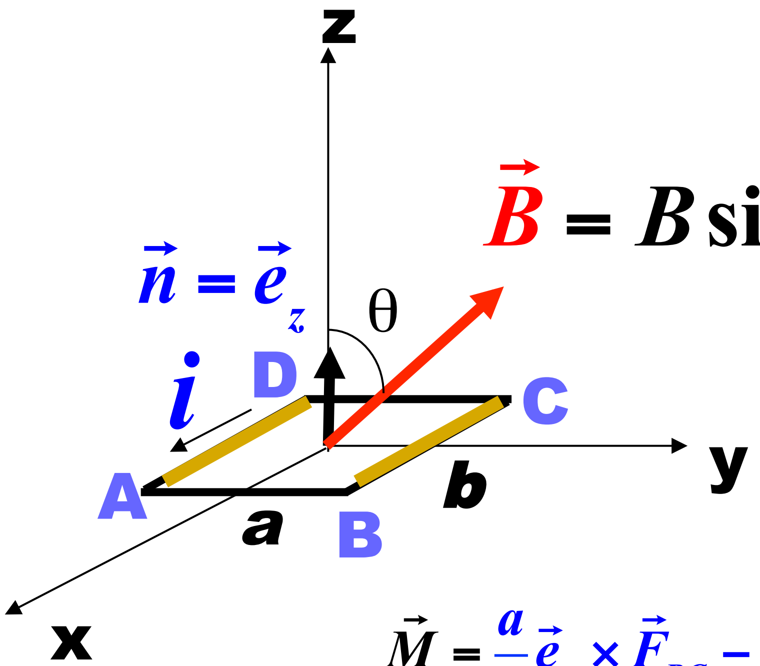
Spira in un campo magnetico



$$\vec{B} = B\sin\vartheta\vec{e}_y + B\cos\vartheta\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{AB} = i(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\times\vec{B} = ia\vec{e}_y \times \vec{B} = iaB\cos\theta\vec{e}_x \\ \vec{F}_{CD} = i(\vec{r}_D - \vec{r}_C)\times\vec{B} = -\vec{F}_{AB} \\ \vec{F}_{BC} = i(\vec{r}_C - \vec{r}_B)\times\vec{B} = -ib\vec{e}_x \times \vec{B} = -ibB\sin\theta\vec{e}_z + ibB\cos\theta\vec{e}_y \\ \vec{F}_{AD} = i(\vec{r}_A - \vec{r}_D)\times\vec{B} = -\vec{F}_{BC} \end{cases}$$

Spira in un campo magnetico



$$\vec{B} = B\sin\theta\,\vec{e}_y + B\cos\theta\,\vec{e}_z$$

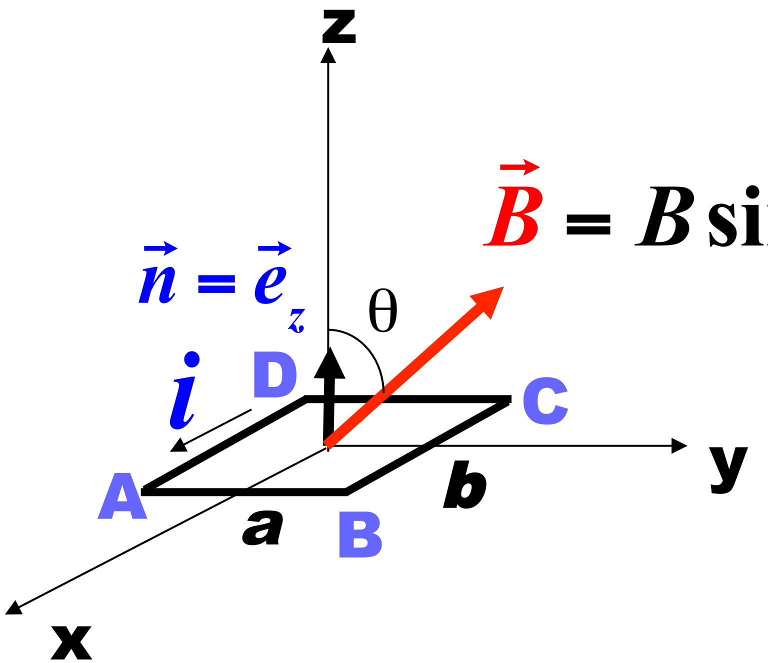
Momento meccanico

$$\vec{M} = \frac{a}{2}\vec{e}_y \times \vec{F}_{BC} - \frac{a}{2}\vec{e}_y \times \overbrace{\vec{F}_{AD}}^{-\vec{F}_{BC}} = a\vec{e}_y \times \vec{F}_{BC}$$

$$= a\vec{e}_y \times \left(-ibB\sin\theta\,\vec{e}_z + ibB\cos\theta\,\vec{e}_y\right) \quad = -iabB\sin\theta\,\vec{e}_y \times \vec{e}_z$$

$$= iabB\sin\theta\,\vec{e}_z \times \vec{e}_y \quad = iA\vec{n} \times \vec{B} \quad = \vec{m} \times \vec{B}$$

Spira in un campo magnetico



$$\vec{n} = \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = B \sin\theta \vec{e}_y + B \cos\theta \vec{e}_z$$

Momento meccanico

$$\vec{m} = iA\vec{n}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

Spira in un campo magnetico

- Vale per un circuito piano di **forma arbitraria**
  - *un circuito puo` sempre essere approssimato da un reticolo di spire rettangolari infinitesime*
  - *i lati adiacenti sono percorsi da correnti opposte e non contribuiscono al momento della forza*

$$\vec{m} \;//\; \vec{B} \Rightarrow \vec{M} = 0$$

$$\theta = 0 \Rightarrow$$ Equilibrio stabile

$$\theta = \pi \Rightarrow$$ Equilibrio instabile

Spira in un campo magnetico

- Spira con momento di inerzia I rispetto ad un asse di rotazione parallelo a **M**

$$\frac{dL}{dt} = M \quad = -mB\sin\theta \quad \simeq -mB\theta$$

$$L = I\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mB\theta = 0}$$

Spira in un campo magnetico: piccole oscillazioni

- Spira con momento di inerzia I rispetto ad un asse di rotazione parallelo a **M**

$$\boxed{I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mB\theta = 0}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}$$

Principio di equivalenza di Ampere

- *Un ago magnetico sottoposto ad un campo magnetico si comporta come una spira percorsa da corrente*
- *Una spira piana di area dA percorsa dalla corrente i equivale agli effetti magnetici a un dipolo magnetico di momento magnetico*

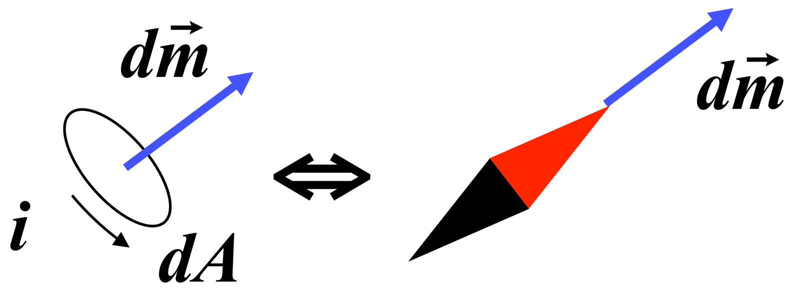
$$d\vec{m} = i\,dA\,\vec{n}$$

$\vec{n}$ perpendicolare al piano della spira e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite destrorsa

Principio di equivalenza di Ampere

- *Un ago magnetico sottoposto ad un campo magnetico si comporta come una spira percorsa da corrente*
- *Una spira piana di area dA percorsa dalla corrente i equivale agli effetti magnetici a un dipolo magnetico di momento magnetico*

$$d\vec{m} = i\,dA\,\vec{n}$$



Interazione dipolo magnetico campo magnetico

- Analogia con il dipolo elettrico

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos\theta = -iAB\cos\theta$$

Energia potenziale

$$M = -\frac{dU}{d\theta} = -mB\sin\theta$$

Momento meccanico

Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

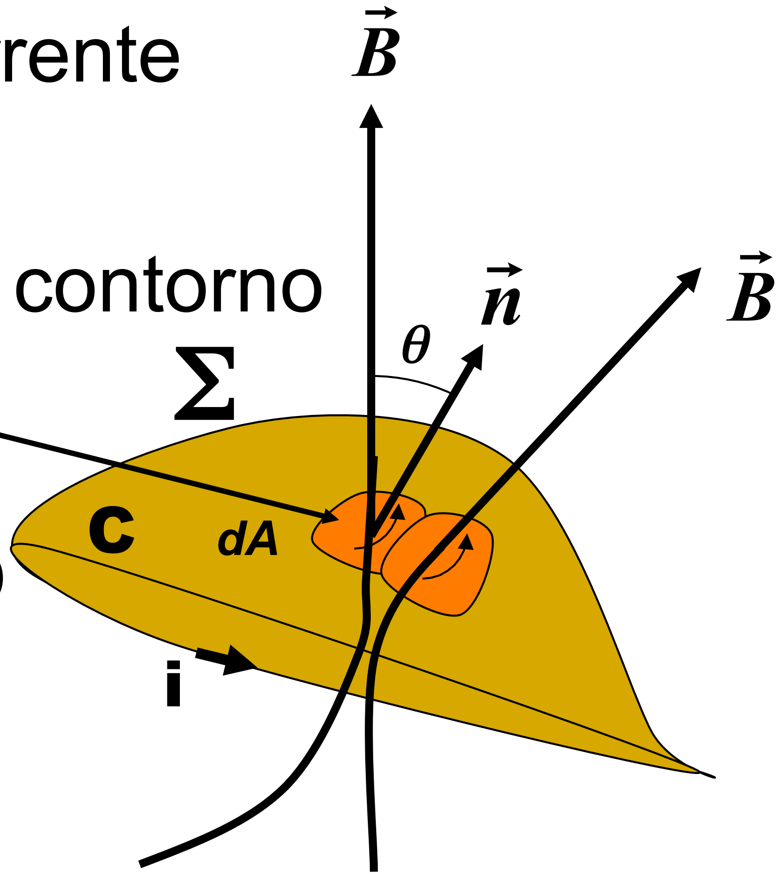
- Circuito C percorso da corrente
- Superficie Σ contorno
- Circuiti elementari: resta il contorno

$$dU = -d\vec{m} \cdot \vec{B} \qquad d\vec{m} = i\,dA\,\vec{n}$$

energia potenziale del circuito C

$$U = \int dU = -i \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}\, dA = -i\Phi_{\Sigma}(\vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$



Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

- Circuito C percorso da corrente
- Superficie Σ contorno
- Circuiti elementari: resta il contorno

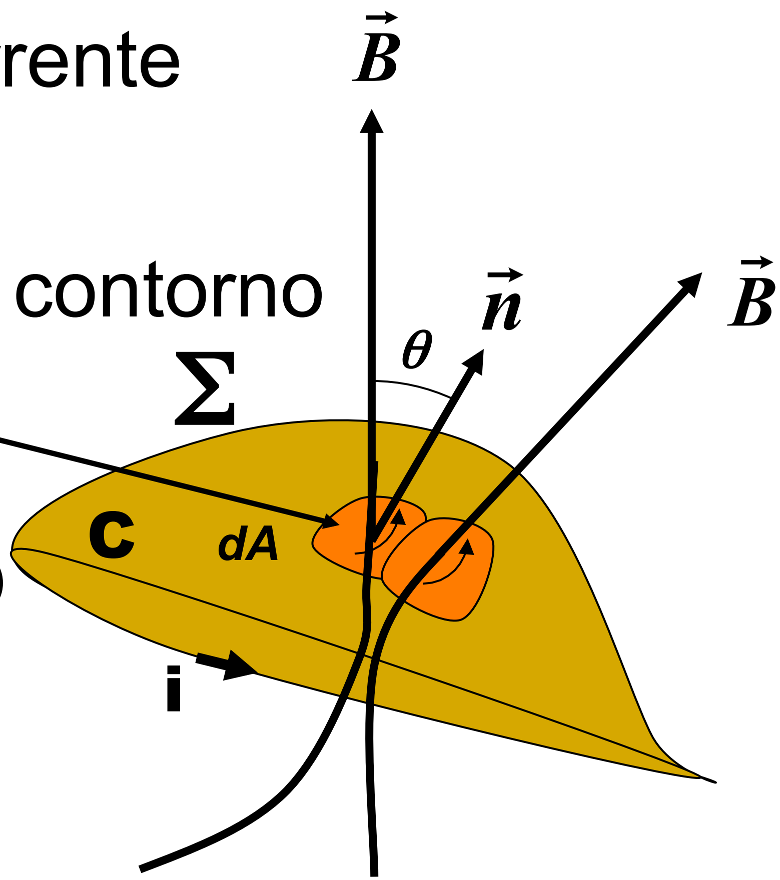
$$d\vec{m} = idA\vec{n}$$

energia potenziale del circuito C

$$U = \int dU = -i\int_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dA = -i\Phi_{\Sigma}(\vec{B})$$

$$U = -i\int_{\Sigma} \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{n}\,dA = -i\int_{C} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Stokes



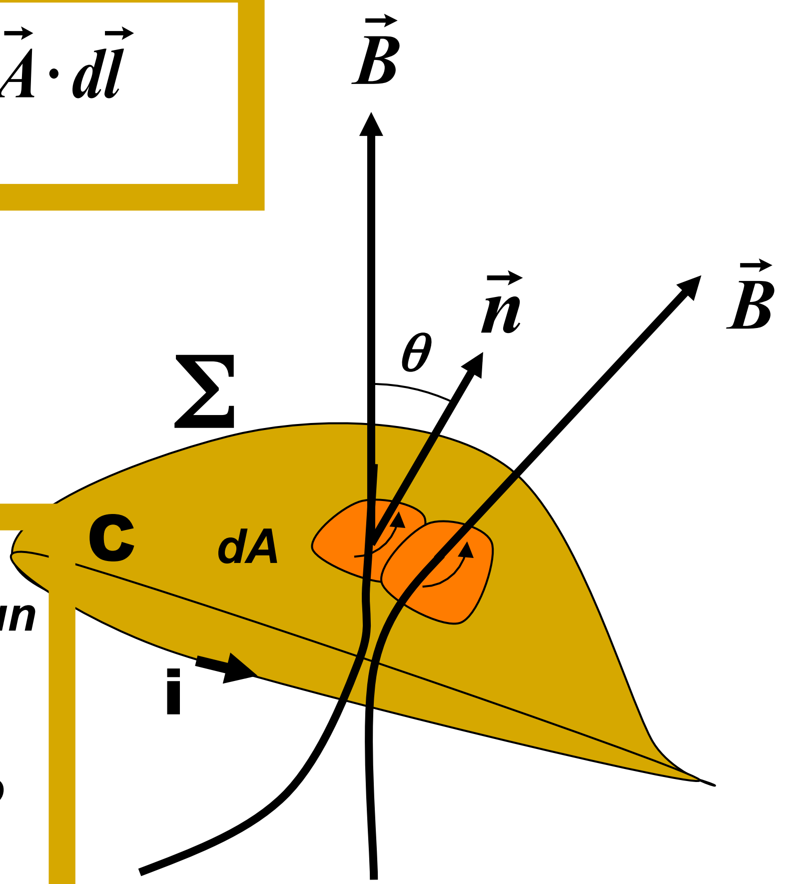
Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

$$U = -i\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = -i\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie dipende solo dal contorno C della superficie

➔ *flusso **concatenato** con il circuito*

L'energia potenziale di interazione di un circuito C percorso da una corrente i con un campo magnetico B attraverso una superficie Σ e` data dal prodotto della corrente per il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito, cambiato di segno.



Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

- Moto del circuito relativamente al campo magnetico:
  - *variazione del flusso concatenato*
  - *variazione dell'energia di interazione*

$$dW = U_A - U_{A+dA} = -dU \quad = i d\Phi(\vec{B})$$

se la corrente resta **costante** durante lo spostamento

$$W = i\Delta\Phi(\vec{B}) = i\left[\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B})\right]$$

Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

- Traslazione infinitesima $\delta\vec{x}$

$$dW = i\left[\Phi(\vec{x}+\delta\vec{x})-\Phi(\vec{x})\right] = i\vec{\nabla}\Phi\cdot\delta\vec{x}$$

$$dW = \vec{F}\cdot\delta\vec{x}$$ $\vec{F}$ forza che agisce sul circuito

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U = i\vec{\nabla}\Phi(\vec{B})}$$

Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

- Rotazione rigida infinitesima $\delta\theta$

$$dW = -dU = M_\theta \delta\theta \quad = i\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\delta\theta$$

$$\boxed{M_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = i\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}}$$

Forza, lavoro, momento, flusso magnetico

- Circuito piano di area A molto piccola (campo uniforme su A)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = i\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{n}A)$$

$$M_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = i\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{B}\cdot\vec{n}A)$$

- Valide anche per un piccolo ago magnetico

- Equivalenza con il dipolo elettrico in un campo elettrostatico

Proprietà	Dipolo elettrico	Dipolo magnetico
Momento di dipolo	$\vec{p} = q\vec{l}$	$\vec{m} = iS\vec{n}$
Momento meccanico $\vec{M}$	$\vec{p}\times\vec{E}$	$\vec{m}\times\vec{B}$
Energia potenziale U	$-\vec{p}\cdot\vec{E}$	$-\vec{m}\cdot\vec{B}$

Condizione: i=costante

- E` importante osservare che tutte le considerazioni svolte valgono a condizione che durante lo spostamento **la corrente resti costante**
- Infatti la variazione del flusso magnetico concatenato con il circuito induce fenomeni (che studieremo piu` avanti) che variano la corrente circolante

Condizione: i=costante

- E` pertanto necessario un dispositivo esterno che mantenga costante la corrente
- Ne consegue che l’energia potenziale di interazione ‘dipolo-campo’ non puo` essere l’unica forma di energia coinvolta

Unita` di misura del flusso

- Flusso magnetico: campo x superficie

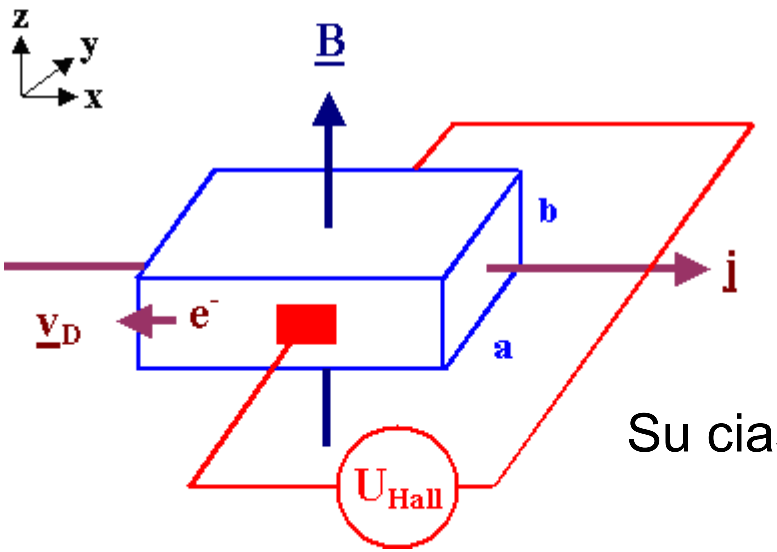
$$[\Phi]=[B][A]\Rightarrow Tm^2 \quad \textbf{Weber}$$

$$1Wb=1T\cdot 1m^2$$

- Momento magnetico: $$Am^2=\frac{J}{T}$$

Momenti magnetici correnti microscopiche $\begin{cases}\textbf{elettrone} & \sim 10^{-23}\ \mathrm{Am^2} \\ \textbf{protone} & \sim 5\cdot 10^{-27}\ \mathrm{Am^2}\end{cases}$

Effetto Hall



$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

$$\vec{J} = \frac{i}{ab}\vec{e}_x = nq\vec{v}_D$$

Su ciascun portatore agisce la forza di Lorentz

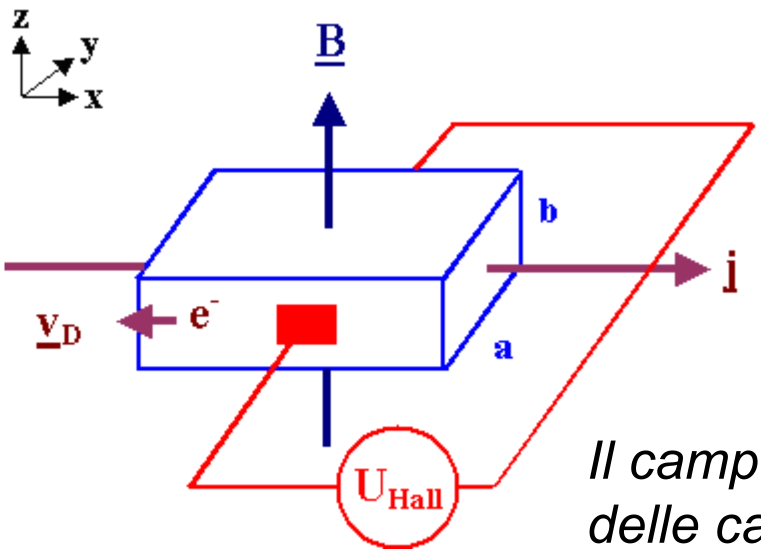
$$\vec{F} = e\vec{v}_D \times \vec{B}$$

Campo elettromotore (non conservativo)

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v}_D \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{nq} \times \vec{B} = \frac{JB}{nq}\vec{e}_y$$

il verso del campo elettromotore dipende dal segno della carica

Effetto Hall



$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

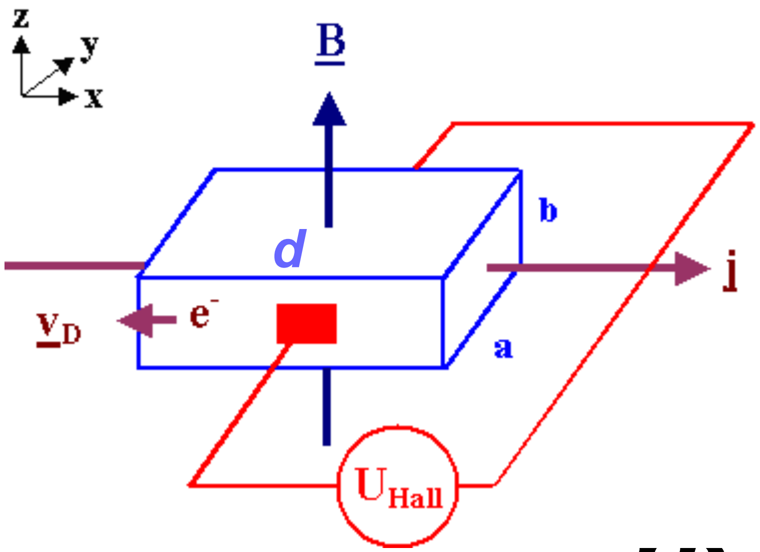
$$\vec{J} = \frac{i}{ab}\vec{e}_x = nq\vec{v}_D$$

Il campo elettromotore genera una deflessione delle cariche in moto e tende ad accumulare cariche su un lato della barretta conduttrice

Equilibrio tra campo elettrostatico e campo elettromotore

$$\vec{v}_D \times \vec{B} + \vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E} = 0$$

Effetto Hall



$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

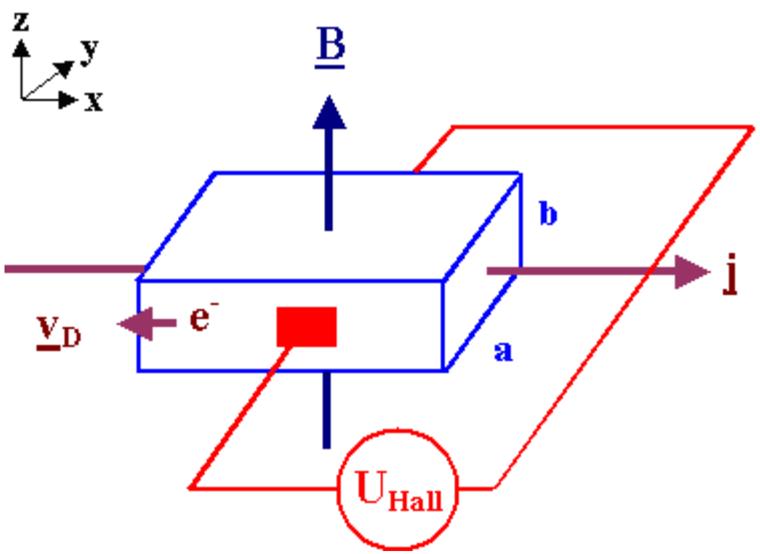
$$\vec{J} = \frac{i}{ab}\vec{e}_x = nq\vec{v}_D$$

Tensione del campo elettromotore

$$\varepsilon_H = E_H a = \frac{JB}{nq}a = \frac{i}{\cancel{a}b}\frac{B}{nq}\cancel{a} = \boxed{\frac{iB}{nqb}}$$

$$i = \frac{V}{R} = \frac{V}{\rho\frac{d}{ab}} = \frac{Vab}{\rho d} = \frac{Va\cancel{b}}{\rho d}\frac{B}{nq\cancel{b}} = \frac{Ba}{nq\rho}\frac{V}{d}$$

Effetto Hall



$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

$$\vec{J} = \frac{i}{ab}\vec{e}_x = nq\vec{v}_D$$

$$\varepsilon_H = \frac{Ba}{nq\rho}\frac{V}{d}$$

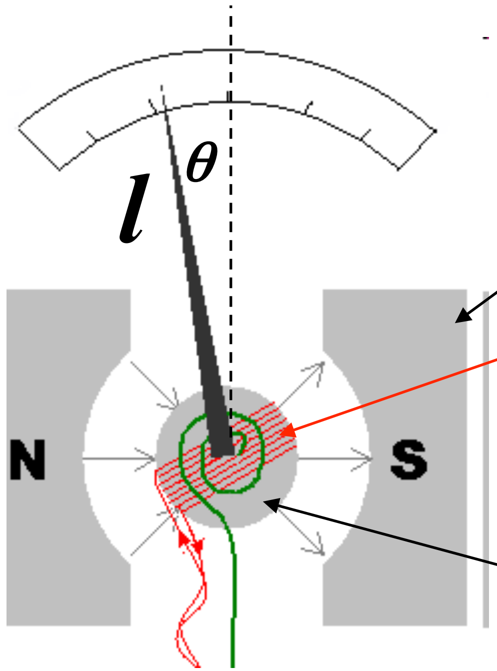
segno di ε_H ➔ segno dei portatori di carica

moduli di ε_H e B ➔ densita` di carica nq

$\frac{\varepsilon_H}{V} \propto B$ ➔dalla misura della tensione di Hall si puo` misurare **B**

Galvanometro

- Strumento alla base della realizzazione di strumenti per la misura di ***intensita` di corrente***, ***differenze di potenziale*** e ***resistenze***



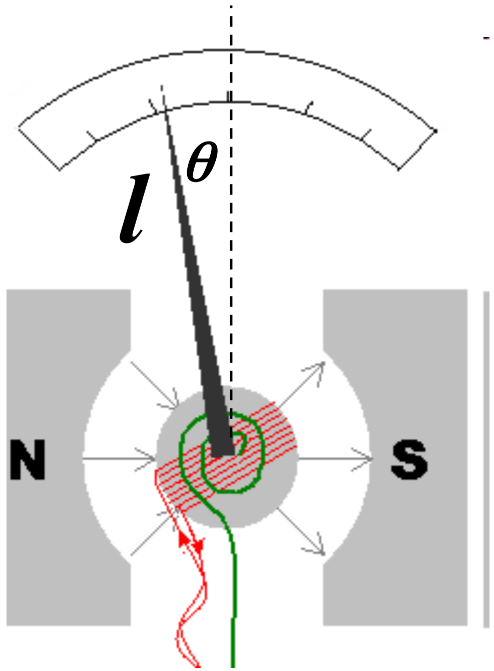
magnete permanente

bobina di N spire rettangolari di area S attraverso cui passa la corrente da misurare

cilindro di ferro dolce – fa si che le linee del campo magnetico siano sempre perpendicolari alla superficie del cilindro ➔ ai lati verticali della bobina

Galvanometro

- Strumento alla base della realizzazione di strumenti per la misura di ***intensita` di corrente***, ***differenze di potenziale*** e ***resistenze***



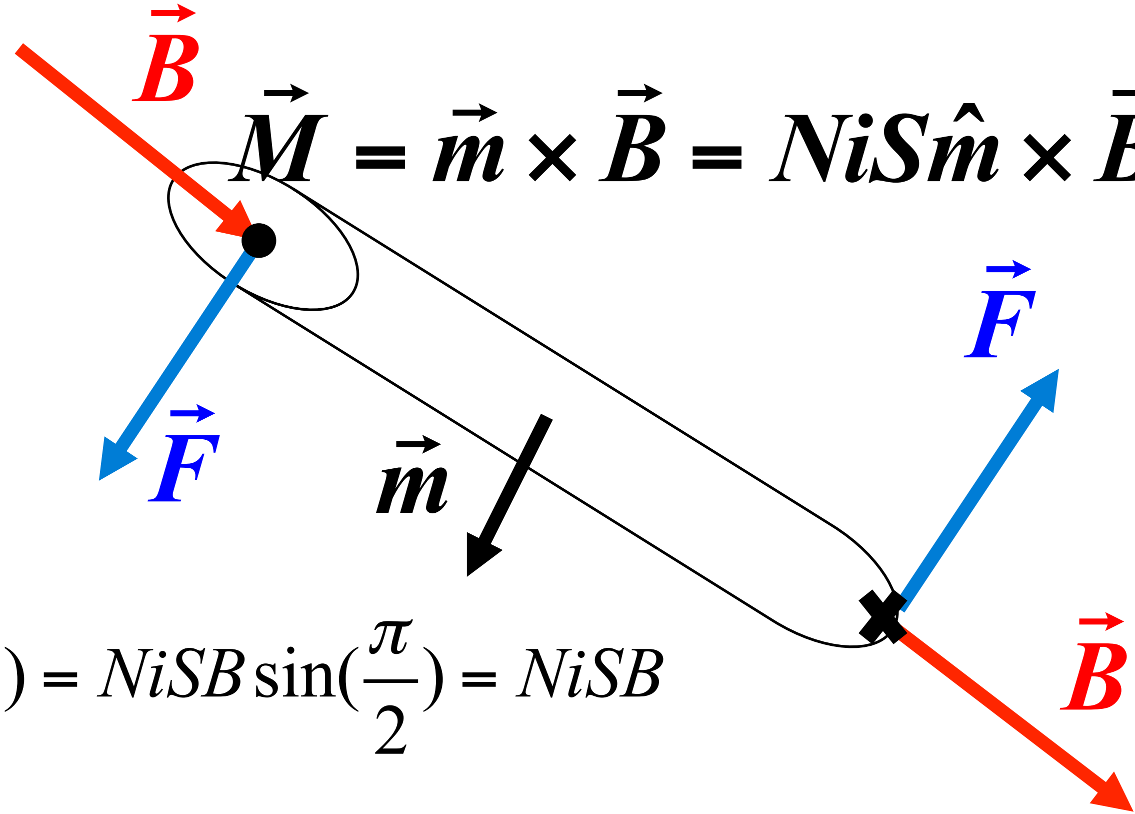
momento magnetico della bobina $\vec{m} = NiS\vec{n}$

forma un angolo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *con il campo agente sui lati verticali*

la bobina e` mantenuta in asse da due molle

quando circola corrente la bobina entra in rotazione, e le molle si ***oppongono***

Galvanometro



$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = NiS\hat{m} \times \vec{B}$$

$$M = NiSB\sin(\vartheta_{mB}) = NiSB\sin(\frac{\pi}{2}) = NiSB$$

All'equilibrio

$$k\theta = NiSB \Rightarrow \theta = \frac{NiSB}{k} \Rightarrow i \propto \theta$$